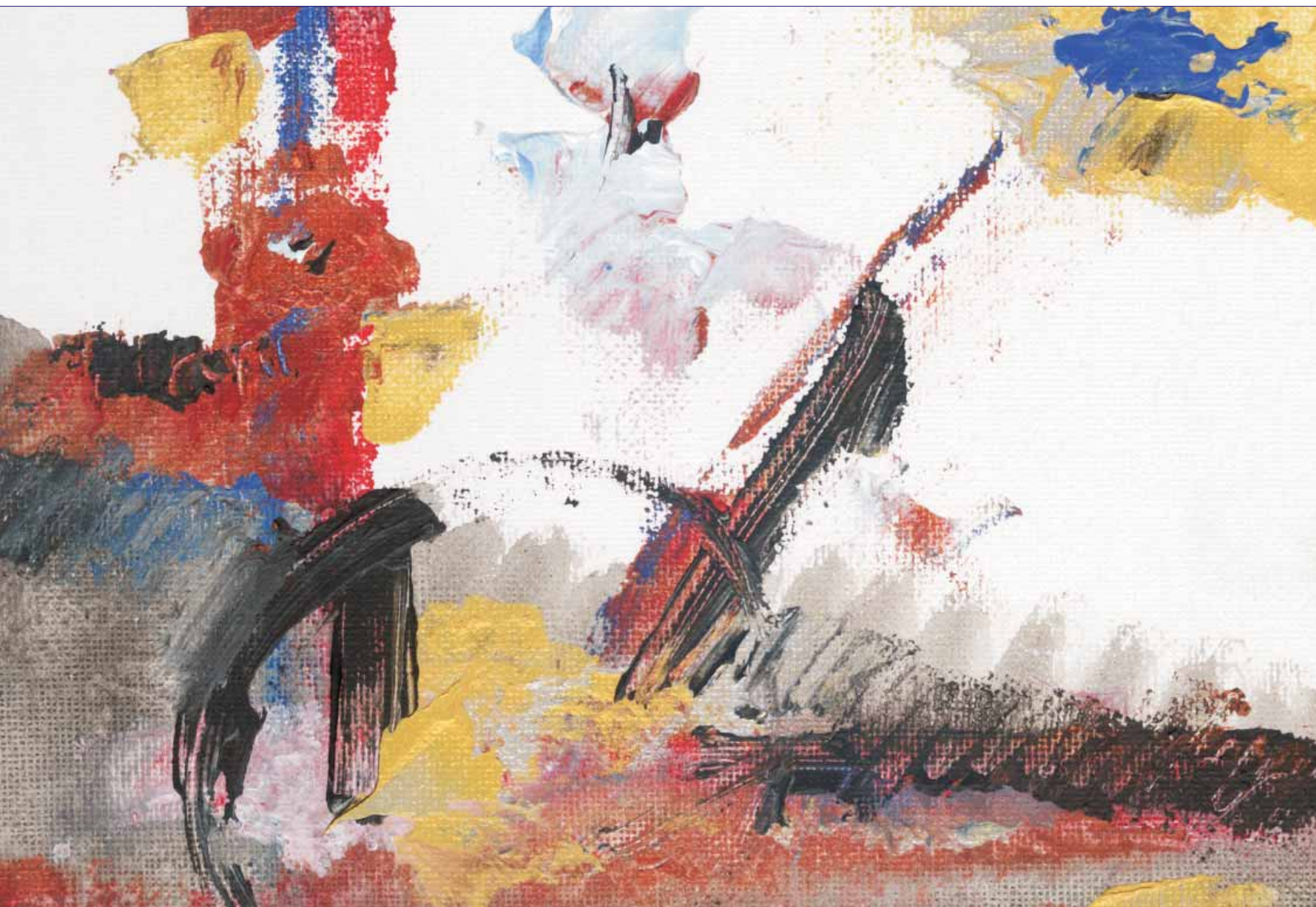


VIKTORS AJEVSKIS

PĒTĪJUMS  
3 / 2013

**DINAMISKĀ LĪDZSVARA MODEĻU NELOKĀLIE  
ATRISINĀJUMI: TUVINĀTĀS STABILĀS VARIETĀTES  
PIEEJA**



**SATURS**

KOPSAVILKUMS	3
NETEHNISKS KOPSAVILKUMS	4
1. IEVADS	7
2. MODELIS	10
2.1. Deterministisks modelis	10
2.2. Modeļa transformēšana	11
2.3. Stabilā varietāte	12
2.4. Apzīmējums un definīcija	13
2.5. Atrisinājuma tuvināšana	14
2.6. Iztirzājums	17
2.7. Saistība ar pagarinātās trajektorijas metodi	18
3. STOHAŠTISKAIS GADĪJUMS	19
4. NEOKLASISKĀ IZAUGSMES MODEĻA PIEMĒRS	20
SECINĀJUMS	23
PIELIKUMI	24
A pielikums. Neoklasiskais izaugsmes modelis	24
B pielikums	28
LITERATŪRA	33

## KOPSAVILKUMS

Šis pētījums iepazīstina ar metodi pieaugošas precizitātes tuvinātu kontrolfunkciju virknes izveidošanai nelokālos apgabalos. Metodes pamatā ir stabilās varietātes jēdziens, kas aizgūts no dinamisko sistēmu teorijas. Tuvinātās kontrolfunkcijas veido, izmantojot saspiedošo attēlojumu teorēmu un to, ka racionālo gaidu modeļu atrisinājumi konverģē uz stabila līdzsvara stāvokli. Šāda pieeja ļauj iegūt tuvinājumu precizitātes un to definīcijas apgabala novērtējumu. Metode piemērota neoklasiskajam izaugsmes modelim un salīdzināta ar perturbāciju metodēm. Jau otrais piedāvātās pieejas tuvinājums nodrošina ļoti augstas precizitātes tuvināto atrisinājumu globālā apgabalā. Atšķirībā no izvirzījumiem Teilora rindā šīs metodes atrisinājumi globāli pārmanto tādas precīzā atrisinājuma īpašības kā monotonitāte un konkavitāte.

**Atslēgvārdi:** dinamiskais līdzsvars, racionālās gaidas, nelineārie nekļūdīgas paredzēšanas modeļi, stabilā varietāte, perturbāciju metode, pagarinātā trajektorija, neoklasiskais izaugsmes modelis

**JEL kodi:** C62, C63, D9, D58

## NETEHNISKS KOPSAVILKUMS

Vispārējā līdzsvara modeļi pēc savas būtības ir nelineāri modeļi. Derīguma funkcijas, kas atspoguļo vēlmi izvairīties no riska, ražošanas funkcijas ar samazinošu mēroga efektu, pielāgošanas izmaksas investīcijās ir tikai daži modeļu aplūkoto nelinearitāšu piemēri. Vairākums vispārējā līdzsvara modeļu nepieļauj slēgtas formas atrisinājumu – vienīgā iespēja ir rast tuvinātu atrisinājumu, izmantojot skaitliskās metodes. Makroekonomikas literatūrā visplašāk lietotas DSGE (dinamiskais stohastiskais vispārējais līdzsvars – *Dynamic Stochastic General Equilibrium*) modeļu linearizētās versijas. Iemesls galvenokārt ir to vienkāršība un iespēja novērtēt modeļus, izmantojot standarta ekonometrijas rīkus (piemēram, Kalmana filtru). Tomēr nelinearitātēm ir ļoti būtiska loma daudzu tādu problēmu risināšanā, kuras nav iespējams atrisināt ar lineāru modeļu palīdzību. Šo problēmu vidū ir, piemēram, riska prēmijas makroekonomiskie determinanti, nenoteiktības šoku sekas, makromodeļu laikā mainīgās novirzes, optimālā politika, asimetriskā reakcija uz pozitīviem un negatīviem šokiem, sliekšņa efekts, dažubrīd saistoši ierobežojumi utt. (sk. Dž. Amizāno (*G. Amisano*) un O. Tristāni (*O. Tristani*) (4) un (5), H. Fernandess-Viljaverde (*J. Fernández-Villaverde*), P. A. Gerrons-Kintana (*P. A. Guerrón-Quintana*), H. F. Rubio-Ramires (*J. F. Rubio-Ramírez*) u.c. (17), Ž. H. van Binsbergens (*J. H. van Binsbergen*), H. Fernandess-Viljaverde, R. S. J. Kojens (*R. S. J. Koijen*) u.c. (9), Č. Kims (*J. Kim*) un S. Kims (*S. Kim*) (27), R. Kolmanis (*R. Kollmann*) (31) un (32), K. L. Džads (*K. L. Judd*) (25), M. Vudfords (*M. Woodford*) (40) un V. T. Gavins (*W. T. Gavin*), B. D. Kīns (*B. D. Keen*), A. V. Rihters (*A. W. Richter*) u.c. (20)).

Parasti nelineāru racionālo gaidu modeļu atrisinājumos izmanto divu veidu pamatmetodes – lokālās (perturbāciju metodes) un globālās (projekciju metodes, stohastiskā simulācija u.c.). Katram veidam ir savas priekšrocības un trūkumi. Globālās metodes spēj aprēķināt atrisinājumus lielos apgabalos, turpretī perturbāciju metodes var izmantot tikai ap stabilu līdzsvara stāvokli. Tomēr globālo metožu trūkums ir tas, ka, pastāvot stabila līdzsvara stāvokļa dimensionalitātei, strauji pieaug aprēķināšanas izmaksas. Šī īpašība, ko sauc par dimensionalitātes lāstu, ierobežo projekcijas metožu piemērošanu pat attiecībā uz vidēja lieluma modeļiem.

Perturbāciju metodes atrisina modeļa precīzā atrisinājuma koeficientus izvirzījumiem Teilora rindā ap deterministisku stabila līdzsvara stāvokli. Salīdzinājumā ar globālajām metodēm perturbāciju metodēm ir trīs galvenās priekšrocības – lielāks aprēķināšanas ātrums, tās iespējams viegli piemērot modeļiem ar lielu stāvokļa mainīgo skaitu un iespējams izmantot lietotājdraudzīgu programmatūru (piemēram, *Dynare*). Tomēr augstākas kārtas perturbāciju tuvinājumi ir polinomi, tādējādi tie no precīzās pamatā esošās kontrolfunkcijas nemanto tādas globālās īpašības kā, piemēram, monotonitāte un konveksitāte. Vēl viena nelabvēlīga polinomu īpašība, kas saistīta ar jau minētajām, ir tā, ka tie ģenerē neierobežotus atrisinājumus, ja tautsaimniecība ir tālu no stabila līdzsvara stāvokļa (V. J. den Hāns (*W. J. den Haan*) un J. de Vinds (*J. de Wind*) (14) un (15)). Šāda situācija var rasties, ja tautsaimniecība: a) ir pakļauta ievērojamam šokam; b) ir vairāku secīgu ilgstošu šoku ietekmē; c) ir pārejas ekonomikas valsts vai attīstības valsts, tāpēc tās pašreizējais stāvoklis var būt tālu no stabila līdzsvara stāvokļa.

Attiecībā uz otrās kārtas izvirzījumiem Teilora rindā Č. Kims (*J. Kim*), S. Kims, E. Šaumburgs (*E. Schaumburg*) u.c. (28) eksplozīvu izlases trajektoriju problēmu



risināšanai ierosinājuši lietot saīsināšanas metodi, ko viņi dēvē par nopļaušanu (*pruning*). Nopļaušanas procedūra aizstāj kvadrātlocekli ar pirmās kārtas atrisinājuma vektoriāliem reizinājumiem, tādējādi iegūstot rekursīvu lineāro atrisinājumu. Č. Kims, S. Kims, E. Šaumburgs u.c. (28) parāda, ka šādi saīsināts tuvinājums neeksplozē. Dažādus nopļaušanas metožu paplašinājumus un modifikācijas piedāvā Dž. Lombardo (*G. Lombardo*) (35), V. J. den Hāns un J. de Vinds (15) un M. M. Andrēasens (*M. M. Andreassen*), H. Fernandess-Viljaverde un H. F. Rubio-Ramiess (7). Tomēr, pastāvot pietiekami lielam šokam, nopļaušanas procedūras pāris pirmās impulsa reakcijas var būt ar nepareizām zīmēm, t.i., to vērtība varētu būt negatīva, nevis pozitīva. Šāds gadījums, šķiet, ir pat sliktāks par eksplozīvu dinamiku, jo tieši pāris pirmo periodu impulsa reakcijas ir visinteresantākās un būtiskākās, nosakot modeļa teorētiskās implikācijas, kā arī veicot politikas analīzi. Tādējādi nepareizas zīmes varētu pētnieku vai politikas veidotāju maldināt. Lietojot nopļaušanas procedūru, faktiski iegūst to, ka impulsa reakcijas funkcijas konverģē uz nulli. Tas pats par sevi nesniedz daudz informācijas par tādām modeļa īpašībām kā mainīgo mijiedarbība, šoku izplatīšanās u.c.

Šis pētījums iepazīstina ar vispārēju metodi pieaugošas precizitātes kontrolfunkciju virknes izveidošanai nelokālos apgabalos. Piedāvātās metodes pamatā ir jēdziens, kas radies dinamisko sistēmu teorijā (O. Galors (*O. Galor*) (19), Ž. M. Granmons (*J. M. Grandmont*) (22)) un ko dēvē par stabilo varietāti – t.i., punktu kopums, kas tuvojas seglu punktam, laikam tiecoties uz bezgalību. Būtībā stabilo varietāti nosaka nelineāra racionālo gaidu modeļa atrisinājumu kopums, jo katram atrisinājumam jāizpilda stabilitātes nosacījums, t.i., ilgtermiņā jānodrošina konverģence uz stabilu stāvokli. Ekonomikas literatūrā šādu kopumu attēlo kā kontrolfunkcijas (vai citiem vārdiem – lēmuma funkcijas) grafiku, kas attēlo stāvokļa mainīgos kontroles mainīgajos.

Algoritms ietver iterācijas procedūru, ko dēvē par secīgo tuvināšanas metodi. Šī metode ir viegli izmantojama un iekļaujama esošajās programmatūras platformās (piemēram, *Dynare*) (S. Adžemjans (*S. Adjemian*), H. Bastani (*H. Bastani*), F. Karamē (*F. Karamé*) u.c. (1)). Minētā pieeja ļauj arī iegūt aplēses par tuvināto atrisinājumu precizitāti un apgabalu. Salīdzinājumā ar perturbāciju metodēm piedāvātie atrisinājumi ir nelokāli un pēc būtības – eksponenti stabili, tāpēc tie nevar eksplodēt.

Pētījumā aplūkotā metode tiek piemērota deterministiskajam neoklasiskajam izaugsmes modelim (V. E. Broks (*W. A. Brock*) un L. Dž. Mermens (*L. J. Mirman*) (11)). Tuvināto atrisinājumu precizitāte tika salīdzināta ar izvirzījumiem Teilora rindā, un tika konstatētas šādas piedāvātās metodes priekšrocības:

- 1) jau pirmais algoritma tuvinājums nodrošina ļoti augstu globālā tuvinājuma precizitāti;
- 2) otrās un trešās kārtas tuvinātos atrisinājumus ir gandrīz neiespējami globāli atšķirt no precīzā atrisinājuma;
- 3) pat izvirzījumu Teilora rindā konverģences apgabalā trešās kārtas tuvinātais atrisinājums ir precīzāks par 16. kārtas izvirzījumu Teilora rindā;
- 4) atšķirībā no izvirzījumiem Teilora rindā šīs metodes atrisinājumi globāli pārmanto tādas precīzā atrisinājuma īpašības kā monotonitāte un konkavitāte.

Piedāvātā metode saistīta ar pagarinātās trajektorijas metodi (R. Fērs (*R. Fair*) un Dž. Teilors (*J. Taylor*) (16)). Proti – katrā laika punktā pārveidotajai sistēmai

piemērotās pagarinātās trajektorijas metodes atrisinājums vienāds ar atbilstošās tuvinātās kontrolfunkcijas vērtību atbilstošajā laikā. Tādējādi piedāvāto pieeju var uzskatīt par stabilu pagarinātās trajektorijas metodes konverģences pierādījumu. Ja attēlojumu iterāciju vietā izmanto Ņūtona metodi, aprēķinu procesa konverģenci iespējams būtiski paātrināt.

Lai gan šā pētījuma centrā galvenokārt ir nelineāri deterministiski racionālo gaidu modeļi (nekļūdīgas paredzēšanas modeļi), aplūkotas arī iespējas lietojumu paplašināt, piemērojot metodi arī stohastisku modeļu gadījumā. Analogija ar pagarinātās trajektorijas metodi liek domāt, ka S. Adžemjana un M. Žilāra (*M. Juillard*) (2) piedāvāto pieeju, ko sauc par stohastisko pagarinātās trajektorijas pieeju, iespējams izmantot arī šajā gadījumā. Šī pieeja nozīmē, ka nosacītās gaidas tiek aprēķinātas, izmantojot kvadrātūras vai arī kādus stohastiskās simulācijas algoritmus. Vēl viena metodes īpašība ir tās spēja risināt tādas nediferencējamas problēmas kā dažubrīd saistoši ierobežojumi (nulle zemākās robežas problēma, modeļi ar heterogēniem aģentiem un ierobežojumi attiecībā uz aģentiem pieejamiem finanšu aktīviem utt.).

## 1. IEVADS

Nelineāru dinamiskā līdzsvara modeļu atrisinājumos parasti izmanto perturbāciju un projekciju metodes. Projekciju metodes spēj aprēķināt atrisinājumus lielos apgabalos, turpretī perturbāciju metodes var izmantot tikai ap stabilu līdzsvara stāvokli.

Tomēr projekciju metodēm piemīt tāds trūkums, ka, pastāvot stabila līdzsvara stāvokļa dimensionalitātei, strauji pieaug aprēķināšanas izmaksas. Šī īpašība, ko sauc par dimensionalitātes lāstu, ierobežo projekcijas metožu piemērošanu pat attiecībā uz vidēja lieluma modeļiem.

Perturbāciju metodes atrisina modeļa precīzā atrisinājuma koeficientus izvirzījumiem Teilora rindā ap deterministisku stabila līdzsvara stāvokli<sup>1</sup>. Salīdzinājumā ar projekciju metodēm perturbāciju metodēm ir lielāks aprēķināšanas ātrums, tās iespējams viegli piemērot modeļiem ar lielu stāvokļa mainīgo skaitu. Tomēr augstākas kārtas perturbāciju tuvinājumi no precīzās pamatā esošās kontrolfunkcijas nemanto tādas globālās īpašības kā monotonitāte un konkavitāte, jo tās ir polinomi. Rezultātā pietiekami lielu šoku (vai sākotnējo nosacījumu) gadījumā tuvinātie atrisinājumi var būt ar eksplozīvu dinamiku pat tad, ja sākotnējā sistēma ar šiem pašiem šokiem joprojām ir stabila (Č. Kims, S. Kims, E. Šaumburgs u.c. (28), V. J. den Hāns un J. de Vinds (14) un (15)).

Šo problēmu pasliktina tas, ka *a priori* nav zināms, vai šoks ir vai nav pietiekami liels. Piemēram, 1. attēlā parādītas impulsa reakcijas funkcijas attiecībā uz inflāciju un produkcijas izlaidi, ja šoks skar aizdevumu vērtības attiecību pret nodrošinājumu. Simulācijas veiktas, izmantojot otrās kārtas tuvinājumu Latvijas DSGE modelī ar kredītiestāžu sektoru (V. Ajevskis un K. Vītola (3)). Šoka standartnovirze ir 0.03. Šī vērtība nešķiet pārāk liela, jo aizdevuma vērtības attiecības pret nodrošinājumu stabila līdzsvara stāvokļa vērtība ir 0.70. Tomēr, kā parādīts 1. attēlā, pēc 15 ceturkšņiem inflācijas un produkcijas izlaides vērtība palielinās attiecīgi līdz 23% un 18%. Šādas vērtības jau ir samērā lielas, tāpēc pret tām jāizturas piesardzīgi. Pēc 16 ceturkšņiem mainīgie iegūst absolūti nesamērīgus apjomus, pārsniedzot 10<sup>6</sup>% (1. attēlā nav atspoguļoti).

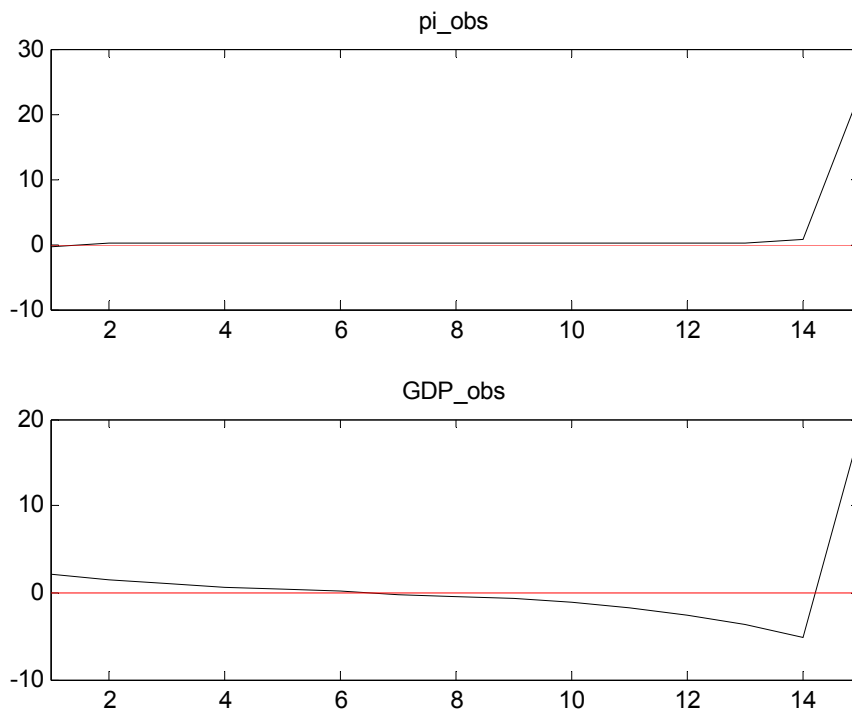
Attiecībā uz otrās kārtas izvirzījumiem Teilora rindā Č. Kims, S. Kims, E. Šaumburgs u.c. (28) eksplozīvu izlases trajektoriju problēmu risināšanā ierosinājuši lietot saīsināšanas metodi, ko viņi dēvē par nopļaušanu (*pruning*). Nopļaušanas procedūra aizstāj kvadrātlocekli ar pirmās kārtas atrisinājuma vektorāliem reizinājumiem, tādējādi iegūstot rekursīvu lineāro atrisinājumu. Č. Kims, S. Kims, E. Šaumburgs u.c. (28) parāda, ka šādi saīsināts tuvinājums neeksplodē. Dažādas nopļaušanas metožu paplašinājumus un modifikācijas piedāvā Dž. Lombardo (35), V. J. den Hāns un J. de Vinds (15) un M. M. Andrēasens, H. Fernandess-Viljaverde un H. F. Rubio-Ramiress (7). Tomēr skaidri redzams, ka, pastāvot pietiekami lielam

<sup>1</sup> Lineāro modeļu atrisinājumiem piedāvāti vairāki algoritmi: piemēram, O. Ž. Blanšārs (O. J. Blanchard) un Č. M. Kāns (C. M. Kahn) (10), H. Ūlīgs (H. Uhlig) (39), G. S. Andersons (G. S. Anderson) un Dž. Mūrs (G. Moore) (6), P. Kleins (P. Klein) (30), K. A. Simss (C. A. Sims) (37) un L. Dž. Kristiāno (L. J. Christiano) (12). Augstākas kārtas perturbāciju metodes aplūko K. L. Džads (25), H. Czjiņš (H. Jin) un K. L. Džads (24), F. Kolārs (F. Collard) un M. Žilārs (13), Š. Šmita-Groe (S. Schmitt-Grohé) un M. Uribe (M. Uribe) (36), Ē. Svonsons (E. Swanson), G. S. Andersons un E. Levins (A. Levin) (38), Č. Kims, S. Kims, E. Šaumburgs u.c. (28), M. M. Andrēasens, H. Fernandess-Viljaverde un H. F. Rubio-Ramiress (7) un P. Goms (P. Gomme) un P. Kleins (21).

šokam, nopļaušanas procedūras pāris pirmās impulsa reakcijas var būt ar nepareizām zīmēm. Šāds gadījums, šķiet, ir pat sliktāks par eksplozīvu dinamiku, jo tieši pāris pirmo periodu impulsa reakcijas ir visinteresantākās un būtiskākās, nosakot modeļa teorētiskās implikācijas, kā arī veicot politikas analīzi. Tādējādi nepareizas zīmes varētu pētnieku vai politikas veidotāju maldināt. Lietojot nopļaušanas procedūru, faktiski iegūst to, ka impulsa reakcijas funkcija konverģē uz nulli. Tas pats par sevi nesniedz daudz informācijas par tādām modeļa īpašībām kā mainīgo mijiedarbība, šoku izplatīšanās u.c.

### 1. attēls

**Impulsa reakcijas funkcijas attiecībā uz inflāciju un produkcijas izlaidi, ja šoks skar aizdevumu vērtības attiecību pret nodrošinājumu Latvijas DSGE modelī ar kredītiestāžu sektoru**



Šis pētījums iepazīstina ar vispārīgu metodi pieaugošanas precizitātes kontrolfunkciju virknes izveidošanai nelokālā apgabalā. Piedāvātās metodes pamatā ir jēdziens, kas radies dinamisko sistēmu teorijā (O. Galors (19), Ž. M. Granmons (22)) un ko dēvē par stabilo varietāti – t.i., punktu kopums, kas tuvojas seglu punktam, laikiem tiecoties uz bezgalību. Būtībā stabilo varietāti nosaka nelineāra racionālo gaidu modeļa atrisinājumu kopums, jo katram atrisinājumam jāizpilda stabilitātes nosacījums, t.i., ilgtermiņā jānodrošina konverģence uz stabilu stāvokli. Ekonomikas literatūrā šādu kopu attēlo kā kontrolfunkcijas (vai citiem vārdiem – lēmuma funkcijas) grafiku, kas attēlo stāvokļa mainīgos kontroles mainīgajos.

Sākotnēji ierosinātās metodes soļi ir tādi paši kā perturbāciju metodēm: 1) atrod stabila līdzsvara stāvokli; 2) linearizē modeli ap stabila līdzsvara stāvokli; un 3) sadala Jakobiāna matricu stabila līdzsvara stāvoklī stabilās un nestabilās daļās. Nākamais solis ir projicēt sākotnējo sistēmu stabila īpaštelpā (ar stabiliem īpašvektoriem definēta telpa) un nestabilā īpaštelpā (ar nestabiliem īpašvektoriem definēta telpa). Rezultātā sistēmu atainos divas apakšsistēmas, kas savstarpēji saistītas tikai ar nelineāriem locekļiem. Šos nelineāros locekļus iegūst kā atlikumus, atņemot linearizēto sistēmu no sākotnējās sistēmas. Tādējādi šie locekļi kopā ar to pirmajiem



atvasinājumiem tuvojas nullei sākumpunktā. Šāds pārveidojums nodrošina, ka iegūto sistēmu var ērti izmantot nākamajā metodes solī. Tuvinātos risinājumus konkrēti iegūst, izmantojot 1) atrisinājumu konverģenci uz stabila līdzsvara stāvokli; un 2) saspiedošo attēlojumu teorēmu (L. Jungkvists (*L. Ljungqvist*) un T. Dž. Sārdžents (*T. J. Sargent*) (34)).

Šāda pieeja ļauj iegūt tuvināto atrisinājumu precizitātes un apgabala novērtējumu. Precizitāte un apgabals atkarīgs no transformētās sistēmas Jakobiāna matricas lieluma un normas un lineārās daļas spektrālajām īpašībām (lielākās stabilās īpašvērtības modulis un mazākās nestabilās īpašvērtības modulis). Dažos gadījumos (piemēram, 4. nodaļas piemērā aplūkotais neoklasiskais izaugsmes modelis) jau pirmais tuvinājums iegūtajā atrisinājumu virknē nodrošina ļoti augstu precizitāti globālā apgabalā.

Salīdzinājumā ar perturbāciju metodēm piedāvātie atrisinājumi ir nelokāli un pēc būtības eksponenciāli stabili, tāpēc tie nevar eksplodēt. Pretēji projekciju metodēm piedāvātais algoritms iegūst kontrolfunkciju tikai vairākos uz priekšu vērsto atrisinājumu punktos, nevis visā definīcijas apgabalā. Šī īpašība nozīmē to, ka salīdzinājumā ar projekciju metodēm šoreiz aprēķiniem nepieciešams mazāk laika. Šādu pieeju vēlams izmantot, lai aprēķinātu konkrētu nekļūdīgas paredzēšanas atrisinājumu, piemēram, atrisinājumu ar konkrētiem sākuma nosacījumiem (konkrēta impulsa reakcijas funkcija).

Piedāvātā metode saistīta ar pagarinātās trajektorijas metodi (R. Fērs un Dž. Teilors (16)). Proti, katrā laika punktā transformētajai sistēmai piemērotās pagarinātās trajektorijas metodes atrisinājumam jābūt vienādam ar atbilstošās tuvinātās kontrolfunkcijas vērtību attiecīgajā laikā. Tādējādi piedāvāto metodi var uzskatīt par stabilu pagarinātās trajektorijas metodes konverģences pierādījumu. Ja attēlojuma iterāciju vietā izmanto Ņūtona metodi, aprēķina procesa konverģenci iespējams būtiski paātrināt. Tomēr Ņūtona metode nozīmē augstākas prasības attiecībā uz attēlojumu gluduma pakāpi. Turklāt algoritma konverģences apgabals var būt mazāks.

Lai gan šā pētījuma centrā galvenokārt ir nelineāri deterministiski racionālo gaidu modeļi (nekļūdīgas paredzēšanas modeļi), aplūkotas arī iespējas metodes lietojumu paplašināt, piemērojot to arī stohastisku modeļu gadījumā. Teorētiski to iespējams paveikt, izmantojot netieši uzdotās funkcijas teorēmu ar nosacījumu, ka stohastiskās inovācijas ir pietiekami mazas (sk. H. Czjiņš un K. L. Džads (24)). Praksē analogija ar pagarinātās trajektorijas metodi liek domāt, ka S. Adžemjana un M. Žilāra (2) piedāvāto pieeju, ko sauc par stohastisko pagarinātās trajektorijas pieeju, iespējams izmantot arī šajā gadījumā. Šī pieeja nozīmē, ka nosacītās gaidas tiek aprēķinātas, izmantojot kvadrātūras vai arī kādus stohastiskās simulācijas algoritmus.

Pētījumā aplūkotā metode tiek piemērota deterministiskā neoklasiskā izaugsmes modeļa logaritma preferences un pilnīgā nolietojuma gadījumam (V. E. Broks un L. Dž. Mermens (11)). Tuvināto atrisinājumu precizitāte tika salīdzināta ar izvirzījumiem Teilora rindā, un konstatētas šādas piedāvātās metodes priekšrocības:

- 1) jau pirmais algoritma tuvinājums nodrošina ļoti augstu globālā tuvinājuma precizitāti;
- 2) otrās un trešās kārtas tuvinātos atrisinājumus ir gandrīz neiespējami globāli atšķirt no precīzā atrisinājuma;
- 3) pat izvirzījumu Teilora rindā konverģences apgabalā netiešās shēmas trešās kārtas tuvinātais atrisinājums ir precīzāks par 16. kārtas izvirzījumu Teilora rindā;

4) pretēji Teilora tuvinājumiem piedāvātā metode globāli pārmanto tādas precīzā atrisinājuma īpašības kā monotonitāte un konkavitāte.

Vēl viena metodes īpašība ir tās spēja risināt tādas nediferencējamas problēmas kā dažubrīd saistoši ierobežojumi (nulles zemākās robežas problēma, modeļi ar heterogēniem aģentiem un ierobežojumi attiecībā uz aģentiem pieejamiem finanšu aktīviem utt.). Šo īpašību nosaka tas, ka saspiedošo attēlojumu teorēma prasa piemērot mazāk ierobežojošu nosacījumu par diferencējamību. Protī – šis nosacījums ir Lipšica nepārtrauktība, kas nozīmē, ka attiecīgo attēlojumu slīpumam jābūt ierobežotam.

## 2. MODELIS

DSGE modeļi parasti ir šādas formas:

$$E_t f(y_{t+1}, y_t, x_{t+1}, x_t, z_t, \varepsilon_{t+1}) = 0 \quad [1],$$

$$z_{t+1} = \Lambda z_t + \sigma \varepsilon_{t+1}, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma \Omega) \quad [2],$$

kur  $E_t$  ir nosacītu gaidu operators;  $x_t$  ir endogēno stāvokļa mainīgo  $n_x \times 1$  vektors laikā  $t$  (piemēram, kapitāla un nobīžu mainīgie);  $y_t$  ir  $n_y \times 1$  vektors, kas satur  $t$ -perioda endogēnos mainīgos, kas nav stāvokļa mainīgie (piemēram, patēriņš, darbaspēks, cenas, Lagranža reizinātāji);  $z_t$  ir eksogēno stāvokļa mainīgo (gadījummainīgo)  $n_z \times 1$  vektors laikā  $t$  (piemēram, ražīgums);  $\varepsilon_{t+1}$  ir traucējumu vektors;  $\sigma \Omega$  ir  $n_z \times n_z$  traucējumu kovariācijas matrica;  $f$  attēlo  $R^{n_y} \times R^{n_y} \times R^{n_x} \times R^{n_x} \times R^{n_z} \times R^{n_z}$  uz  $R^{n_y} \times R^{n_x}$  un tiek pieņemts, ka tas ir vismaz  $1$ -laikā nepārtraukti diferencējams. Skalārs  $\sigma$  ir traucējumu locekļu  $\varepsilon_t$  mēroga parametrs. Visu  $\Lambda$  matricas īpašvērtību modulis ir mazāks par vienu.

### 2.1. Deterministisks modelis

Šajā pētījumā mūs galvenokārt interesē deterministiskais nekļūdīgas paredzēšanas līdzsvars, t.i., gadījums, kur  $\sigma = 0^2$ . Tad [1] – [2] sistēma izskatās šādi:

$$f(y_{t+1}, y_t, x_{t+1}, x_t, z_t, 0) = 0 \quad [3],$$

$$z_{t+1} = \Lambda z_t \quad [4].$$

Šeit var uzskatīt, ka  $z_t$  ir īslaicīgo šoku sākumvērtību vektors laikā  $t$ . Turpinājumā atmet  $f$  pēdējo argumentu. [3] un [4] modeļa atrisinājums iegūst šādu formu:

$$y_t = \tilde{h}(x_t, z_t) \quad [5],$$

$$x_{t+1} = \tilde{g}(x_t, z_t) \quad [6],$$

kur  $\tilde{h}$  attēlo  $R^{n_x} \times R^{n_z}$  uz  $R^{n_y}$ , un to sauc par kontrolfunkciju; savukārt  $\tilde{g}$  attēlo  $R^{n_x} \times R^{n_z}$  uz  $R^{n_x}$ .

<sup>2</sup> 3. nodaļā aplūkots gadījums, kur  $\sigma > 0$ .

## 2.2. Modeļa transformēšana

Nosaka deterministisku līdzsvara stāvokli kā vektorus  $(\bar{y}, \bar{x}, 0)$ , tā ka

$$f(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}, \bar{x}, 0) = 0 \quad [7].$$

Papildu nosacījums [6] atrisinājumam ir tas, ka  $x_t$  jātiecas uz stabila līdzsvara stāvokli  $\bar{x}$ , jo  $t \rightarrow \infty$ ; mainīgais  $z_t$  jau atbilst šim nosacījumam  $A$  matricas īpašību dēļ.

Ar  $(\hat{y}_t, \hat{x}_t)$  apzīmē novirzes no stabila līdzsvara stāvokļa vektoru. Linearizējot [3] ap stabilā līdzsvara stāvokli, iegūst

$$f_1 \hat{y}_{t+1} + f_2 \hat{y}_t + f_3 \hat{x}_{t+1} + f_4 \hat{x}_t + f_5 z_t + N(\hat{y}_{t+1}, \hat{y}_t, \hat{x}_{t+1}, \hat{x}_t, z_t) = 0 \quad [8],$$

kur  $f_i$ ,  $i=1 \div 5$  ir  $f$  attēlojuma daļēji atvasinājumi attiecībā uz attiecīgi  $y_{t+1}$ ,  $y_t$ ,  $x_{t+1}$ ,  $x_t$ ,  $z_t$  punktā  $(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}, \bar{x}, 0)$ , bet  $N$  definē kā

$$N(\hat{y}_{t+1}, \hat{y}_t, \hat{x}_{t+1}, \hat{x}_t, \hat{z}_t) = f(\bar{y} + \hat{y}_{t+1}, \bar{y} + \hat{y}_t, \bar{x} + \hat{x}_{t+1}, \bar{x} + \hat{x}_t, z_t) - f_1 \hat{y}_{t+1} - f_2 \hat{y}_t - f_3 \hat{x}_{t+1} - f_4 \hat{x}_t - f_5 z_t.$$

$N$  attēlojums būs  $f$  nelineārā daļa. Saskaņā ar pieņēmumu par  $f$   $N$  attēlojums ir nepārtraukti diferencējams un kopā ar tā pirmajiem atvasinājumiem tiecas uz nulli punktā  $(0,0,0,0,0)$ . Vienkāršības labad pieņem, ka [8] vienādojumu var pārveidot tā, lai  $N$  attēlojums nav atkarīgs no  $\hat{y}_{t+1}$  un  $\hat{x}_{t+1}$ . Šādu pārveidojumu iespējams veikt daudziem DSGE modeļiem (neoklasiskais izaugsmes modelis aplūkots A pielikumā); pretējā gadījumā pieņem, ka netieši uzdotās funkcijas teorēma ļauj iegūt šādu [8] atainojumu:

$$f_1 \hat{y}_{t+1} + f_2 \hat{y}_t + f_3 \hat{x}_{t+1} + f_4 \hat{x}_t + f_5 z_t + N(\hat{y}_t, \hat{x}_t, z_t) = 0 \quad [9].$$

[4] un [9] vienādojumu iespējams izteikt vektora formā kā:

$$\Phi w_{t+1} = \Gamma w_t + \begin{pmatrix} 0 \\ N(w_t) \end{pmatrix} \quad [10],$$

$$\text{kur } w_t = (z_t, \hat{x}_t, \hat{y}_t)', \Phi = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & f_3' & f_1' \end{pmatrix} \text{ un } \Gamma = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & 0 \\ f_5' & f_4' & f_2' \end{pmatrix}.$$

Pieņem, ka  $\Phi$  matrica ir apgriežama.<sup>3</sup> Jāievēro, ka  $\Phi$  matrica ir kvadrātvienādojums ar dimensiju  $n_z + n_x + n_y$ . Tālāk, reizinot abas [10] puses ar  $\Phi^{-1}$ , iegūst:

$$w_{t+1} = K w_t + N_2(w_t) \quad [11],$$

kur

<sup>3</sup> Šis pieņēmums veikts, lai atvieglotu skaidrojumu. Ja  $\Phi$  ir singulāra matrica, turpinājumā jāizmanto nevis vienkāršs, bet gan vispārīgāks īpašvērtības sadalījums (R. Dž. Kings (*R. G. King*) un M. V. Votsons (*M. W. Watson*) (29)).

$$w_t = \begin{pmatrix} z_t \\ \hat{x}_t \\ \hat{y}_t \end{pmatrix}, K = \Phi^{-1}\Gamma = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & 0 \\ [f_3', f_1']^{-1} f_5' & [f_3', f_1']^{-1} f_4' & [f_3', f_1']^{-1} f_2' \end{pmatrix}$$

un

$$N_2(w_{t+1}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi^{-1} N_1(\hat{y}_t, \hat{x}_t, z_t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ [f_3', f_1']^{-1} N_1(\hat{y}_t, \hat{x}_t, z_t) \end{pmatrix}.$$

Tālāk  $L$  matrica tiek pārveidota Žordāna kanoniskā formā<sup>4</sup> kā

$$K = ZJZ^{-1} \quad [12],$$

kur  $J = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ .  $A$  matrica satur Žordāna šūnas, kuru moduļu īpašvērtības ir mazākas par 1, bet  $B$  matrica satur Žordāna šūnas, kuru moduļu īpašvērtības ir lielākas par 1. Tagad ievieš šādus jaunus mainīgos:

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = Z^{-1} \begin{pmatrix} z_t \\ \hat{x}_t \\ \hat{y}_t \end{pmatrix} \quad [13].$$

Priekšreizinot [11] ar  $Z^{-1}$ , iegūst

$$\begin{aligned} u_{t+1} &= Au_t + F(u_t, v_t), \\ v_{t+1} &= Bv_t + G(u_t, v_t) \end{aligned} \quad [14],$$

kur  $u_t \in R^{n_z+n_x}$ ,  $v_t \in R^{n_y}$  un

$$\begin{pmatrix} F(u_t, v_t) \\ G(u_t, v_t) \end{pmatrix} = Z^{-1} N_2(Z \cdot [u_t, v_t]).$$

No minētā izriet, ka

$$F(0,0) = 0, G(0,0) = 0, F'(0,0) = 0, G'(0,0) = 0 \quad [15],$$

kur  $F'$  un  $G'$  apzīmē attiecīgi  $F$  un  $G$  Jakobiāna matricu punktā  $(0,0)$ .

### 2.3. Stabilā varietāte

Saskaņā ar pieņēmumu  $K$  matrica ir hiperboliska, t.i., tās spektrs nav savienots ar vienības riņķa līniju. Tāpēc [14] sistēmai iespējams piemērot dinamiskās sistēmas teorijas fundamentālu rezultātu, kuru sauc par stabilās varietātes teoriju (O. Galors (19), Ž. M. Granmons (22)). Stabilā varietāte ir invarianta punktu kopa, kas tuvojas

<sup>4</sup> Tālāk izklāstītie rezultāti nemainās, ja [12] izmanto nevis Žordāna sadalījumu, bet gan bloka diagonālo Šura faktORIZĀCIJU.  $K$  matricas bloka diagonālo faktORIZĀCIJU iespējams uzrakstīt šādā formā:  $K = TMT^{-1}$ , kur  $M$  ir divu bloku diagonālā matrica, katrs diagonālais bloks ir kvazi augšējā trijstūra Šura matrica, kas atbilst vai nu stabilām, vai nestabilām īpašvērtībām, un  $T$  ir apgriežama matrica. Šo faktORIZĀCIJU veic *Matlab Control System Toolbox* funkcija *bdschur*.

segļu punktam, laikam tiecoties uz bezgalību. Kopa ir invarianta, ja tā ir invarianta, darbojoties dinamiskai sistēmai. Stabilās varietātes teorēma apliecina, ka fiksēta hiperboliska punkta tuvā apkārtnē pastāv unikāla stabila invarianta varietāte ar tādu pašu dimensiju kā [12] aplūkotās  $K$  matricas stabilajai lineārajai apakštelpai. Turklāt stabilo varietāti iespējams attēlot kā  $h$  funkcijas grafiku:  $U \rightarrow V$ , kur  $U$  un  $V$  ir fiksēta punkta apkārtnes attiecīgi stabilā un nestabilā lineārā apakštelpa. Vēl viena stabilās varietātes īpašība ir tā, ka tās pieskartelpa fiksētajā punktā ir stabilā lineārā apakštelpa. Runājot par racionālo gaidu modeļiem vai DSGE modeļiem plašākā nozīmē, stabilās varietātes piemērs ir [5] kontrolfunkcijas grafiks.

Stabilās varietātes teorēmu parasti pierāda lokāli, t.i., fiksēta punkta tiešā tuvumā (F. Hartmanis (*P. Hartman*) (23), kā arī A. Katoks (*A. Katok*) un B. Haselblats (*B. Hasselblatt*) (26)). Šis pētījums piedāvā 2.5. sadaļā aprakstītu rekurentu procedūru, kas tiešā veidā konstruē tuvinātās stabilās varietātes un kam piemīt skaidra prognozēšanas iespēja. Piedāvātā pieeja ļauj arī kontrolēt tuvināto atrisinājumu precizitāti un definīcijas apgabalu.

## 2.4. Apzīmējums un definīcija

Šajā sadaļā aplūkoti apzīmējumi, kas būs nepieciešami turpmākajās sadaļās. Ar  $U_{r_u}$  un  $V_{r_v}$  apzīmē  $r_u$  un  $r_v$  rādiusu slēgtās lodes, kas centrētas attiecīgi  $R^{n_z+n_x}$  un  $R^{n_y}$  sākumpunktā. Pieņem, ka  $X_{r_u, r_v} = U_{r_u} + V_{r_v}$  ir šo ložu tiešā summa. Ar  $|\cdot|$  apzīmē Eiklīda normu  $\mathfrak{R}^n$ . Reālo matricu inducēto normu definē kā

$$\|B\| = \sup_{|y|=1} |By|.$$

$Z$  matricu [15] var izvēlēties tā, lai

$$\|A\| < \alpha + \gamma < 1 \text{ un } \|B^{-1}\| < \beta + \gamma < 1 \quad [16],$$

kur  $\alpha$  un  $\beta$  ir attiecīgi  $A$  un  $B^{-1}$  matricu lielāko īpašvērtību moduļi, un  $\gamma$  ir pēc izvēles mazs (F. Hartmanis (23)). Jāievēro arī, ka  $\|B^{-1}\| < 1$ , ja  $\gamma$  ir pietiekami mazs. Saskaņā ar definīciju raksta

$$\|G'\|_{X_{r_u, r_v}} = \sup_{(u, v) \in X_{r_u, r_v}} \|G'(u, v)\| \text{ un } \|h_1'\| = \sup_{u \in U_{r_u, 1}} \|h_1'(u)\|,$$

kur  $G'(u, v)$  un  $h_1'$  ir attiecīgi attēlojumu  $G(u, v)$  un  $h_1(u)$  Jakobiāna matricas punktos  $(u, v)$  un  $u$ . Definē visu nepārtraukto funkciju  $X_{r_u, r_v}$  un  $U_r$  normas Banaha telpā kā attiecīgi

$$\|G\|_{X_{r_u, r_v}} = \sup_{(u, v) \in X_{r_u, r_v}} |G(u, v)| \text{ un } \|h\|_{U_r} = \sup_{u \in U_r} |h(u)|. \text{ Savukārt } X_{r_u, r_v} \text{ un } U_r \text{ nepārtraukto}$$

attēlojumu normas Banaha telpā definē reālo matricu telpā ar inducēto normu [16] kā attiecīgi

$$\|G'\|_{X_{r_u, r_v}} = \sup_{(u, v) \in X_{r_u, r_v}} \|G'(u, v)\|, \|F'\|_{X_{r_u, r_v}} = \sup_{(u, v) \in X_{r_u, r_v}} \|F'(u, v)\| \text{ un } \|h'\|_{U_r} = \sup_{u \in U_r} \|h'(u)\|,$$



kur  $G'(u, v)$ ,  $F'(u, v)$  un  $h'(u)$  ir attiecīgi  $G(u, v)$ ,  $F(u, v)$  un  $h(u)$  Jakobiāna matricas punktā  $(u, v)$  un  $u$ .

**Definīcija.** Attēlojumu  $s: X \rightarrow Y$  sauc par Lipšica nepārtrauktību, ja pastāv reāla konstante  $l \geq 0$ , tā ka visiem  $x_1$  un  $x_2$ , kas ir  $X$ ,

$$|s(x_2) - s(x_1)| \leq l|x_2 - x_1|.$$

Mazāko  $l$  konstanti sauc par  $s$  attēlojuma Lipšica konstanti.

Var skaidri redzēt, ka konstante

$$L = \max(\|G'\|_{X_{r_u, r_v}}, \|F'\|_{X_{r_u, r_v}}) \quad [17]$$

ir  $G$  un  $F$  attēlojumu Lipšica konstantes augšējā robeža.

## 2.5. Atrisinājuma tuvināšana

Pieņem, ka  $n \in N$  ir lielāks par 1. No [14] otrā vienādojuma un  $B$  matricas apgriezamības izriet, ka

$$v_{t+n} = -B^{-1}G(v_{t+n}, v_{t+n}) + B^{-1}v_{t+n+1} \quad [18].$$

Stabilitātes īpašība nodrošina, ka visi atrisinājumi, kas ietilpst stabilā varietātē, apmierina  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{t+n}, h(u_{t+n})) = 0$ . Tā kā stabilā lineārā apakštelpa pieskaras stabilajai varietātei sākumpunktā,  $h$  attēlojums tuvojas nullei ar kārtu 2. Tāpēc  $h(u_{t+n+1})$  attēlojuma lielums būs maznozīmīgs, ja  $n$  ir pietiekami liels pat salīdzinājumā ar  $u_{t+n+1}$  vektora garumu, kurš arī ir īss. Šāds spriedums ļauj atņemt  $B^{-1}v_{t+n+1}$  locekli [18] labajā pusē. Rezultātā iegūst šādu vienādojumu:

$$v_{t+n} = -B^{-1}G(u_{t+n}, v_{t+n}) = T_{l, u_{t+n}}(v_{t+n}) \quad [19],$$

kur  $T_{l, u}$  ir  $V_{r_v, 0}$  parametrizēts attēlojums uz  $\mathcal{R}^{n_y}$ . Tā kā  $G(0, 0) = 0$  un  $G'(0, 0) = 0$ , var secināt, ka saspiedošo attēlojumu teorēmu (L. Jungkvists un T. Dž. Sārdžents (34)) iespējams piemērot  $T_{l, u}$  attiecībā uz katru  $u_{t+n} \in U_{r_u, 0}$  dažiem  $U_{r_u, 0}$ . Tādējādi pastāv  $T_{l, u}$  fiksēts  $h_l$  punkts, tā ka

$$h_l(u) = -B^{-1}G(u, h_l(u)), \quad u \in U_{r_u, 0} \quad [20].$$

Nosacījums, lai  $h$  attēlojuma grafiks būtu invarianta varietāte, ir tāds, ka  $h$  grafika vispārīga punkta attēlam, kuram veic [14] pārveidojumu, arī jāatrodas  $h$  grafikā. Tas ir spēkā tikai tad, ja

$$Bh(u) + G(u, h(u)) = h(Au + F(u, h(u))).$$

Ņemot vērā  $B$  apgriezamību, iegūst

$$h(u) = -B^{-1}G(u, h(u)) + B^{-1}h(Au + F(u, h(u))) \quad [21].$$

Lai novērtētu  $h_l$  tuvinājuma kļūdu, atņem pēdējo vienādojumu no [20] punktā

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{t+n}$$

$$\|J'_{t+1, u_{t+n-t-1}}\| < 1 \quad [22].$$

Izmantojot [22] normas, kā arī  $\|G\|_{X_{r_u, 0, r_v, 0}}$  definīciju un trijstūra nevienādību, iegūst

$$|h_1(u_{t+n}) - h(u_{t+n})| \leq \|B^{-1}\| \|G\|_{X_{r_u, 0, r_v, 0}} |h_1(u_{t+n}) - h(u_{t+n})| + \|B^{-1}\| \cdot |h(Au_{t+n} + F(u_{t+n}, h(u_{t+n})))|.$$

$X_{r_u, 0, r_v, 0}$  apkārtņi var izvēlēties tā, lai

$$1 - \|B^{-1}\| \|G\|_{X_{r_u, 0, r_v, 0}} > 0;$$

tāpēc

$$|h_1(u_{t+n}) - h(u_{t+n})| \leq (1 - \|B^{-1}\| \|G\|_{X_{r_u, 0, r_v, 0}})^{-1} \cdot \|B^{-1}\| \cdot |h(Au_{t+n} + F(u_{t+n}, h(u_{t+n})))| \quad [23].$$

No [23] nevienādības izriet, ka pastāv trīs faktori, kas nosaka tuvinātā  $h_1$  atrisinājuma precizitāti. Pirmais faktors ir  $|h(\cdot)|$  normas lielums. Tā kā  $h$  attēlojums tiecas uz nulli ar kārtu 2 sākumpunktā, no tā izriet, ka kaut kādā apkārtņē  $h$  normas lielums būs mazāks par  $|u|$  argumenta normas lielumu. Piemēram, pieņem, ka  $D = \{u: |u| \leq \tau\}$  apgabals, kur  $0 < \tau < 1$ , ir pietiekami mazs. Tādā gadījumā  $|h(u)|$  norma  $D$  apgabalā būs otrā mazākā, t.i.,  $|h(u)| \leq C \tau^2$ , ja  $u \in D$ , kur  $C$  ir konstante.

$h(\cdot)$  norma būtu pat mazāka, ja ņem vērā otru faktoru – stabilitātes īpašību, t.i.,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{t+n}, h(u_{t+n})) = 0$  atrisinājumiem, kas ietilpst stabilajā varietātē.

Tā kā  $F(0, 0) = 0$  un  $F'(0, 0) = 0$ ,  $F(u_{t+n}, h(u_{t+n}))$  norma ir ļoti maza. Tādējādi

$$|Au_{t+n} + F(u_{t+n}, h(u_{t+n}))| \approx |Au_{t+n}| \leq \|A\| \cdot |u_{t+n}| \leq \|A\| \cdot \tau.$$

Jāatceras, ka norma  $\|A\| < 1$  un to nosaka  $A$  matricas lielākās īpašvērtības modulis. Tāpēc var lēst, ka attālums starp  $h$  un  $h_1$  punktā  $u_{t+n}$  ir

$$|h_1(u_{t+n}) - h(u_{t+n})| \leq C \|A\|^2 \cdot \tau^2.$$

Trešais faktors ir  $\|B^{-1}\|$  norma, kuru nosaka nestabilās  $B$  matricas mazākās īpašvērtības modulis un kura norāda uz sistēmas nestabilitātes pakāpi. Pamatā tuvinātais atrisinājums  $h_1$  ir precīzs  $X_{r_u, 0, r_v, 0}$  apgabalos, kur ir spēkā nevienādība

$$\left(1 - \|B^{-1}\| \|G\|_{X_{r_u, 0, r_v, 0}}\right)^{-1} \|B^{-1}\| < 1$$

un precīzā atrisinājuma norma  $|h(u_{t+n+1})|$  ir maza. Šie apgabali var būt nelokāli, jo  $G$  un  $h$  attēlojumiem piemīt īpašība kopā ar to pirmajiem atvasinājumiem tuvojoties nullei sākumpunktā.

Lai iegūtu nākamo tuvinājumu, pārraksta [20] laikam  $t = n - 1$

$$v_{t+n-1} = -B^{-1}G(u_{t+n-1}, v_{t+n-1}) + B^{-1}v_{t+n} \quad [24].$$

Tagad, aizstājot  $h_I$  [20] tuvinājumu ar  $v_{t+n}$  [24], iegūst

$$v_{t+n-1} = -B^{-1}G(u_{t+n-1}, v_{t+n-1}) + B^{-1}h_1(Au_{t+n-1} + F(u_{t+n-1}, v_{t+n-1})).$$

Tāpat kā gadījumā ar  $h_I$ , izmantojot saspiedošo attēlojumu teorēmu, iegūst to, ka pastāv tāds unikāls attēlojums  $h_2$  kā

$$h_2(u_{t+n-1}) = -B^{-1}G(u_{t+n-1}, h_2(u_{t+n-1})) + B^{-1}h_1(Au_{t+n-1} + F(u_{t+n-1}, h_2(u_{t+n-1}))) \quad [25].$$

Lai noteiktu tuvinājuma  $h_2$  precizitāti, no [25] atņem [21]

$$h_2(u_{t+n-1}) - h(u_{t+n-1}) = -B^{-1}[G(u_{t+n-1}, h_1(u_{t+n-1})) - G(u_{t+n-1}, h(u_{t+n-1}))] - B^{-1}[h_1(Au_{t+n-1} + F(u_{t+n-1}, h_1(u_{t+n-1}))) - h(Au_{t+n-1} + F(u_{t+n-1}, h(u_{t+n-1})))].$$

Pieskaitot un atņemot  $h_1(Au_{t+n-1} + F(u_{t+n-1}, h(u_{t+n-1})))$  labajā pusē, iegūst

$$h_2(u_{t+n-1}) - h(u_{t+n-1}) = -B^{-1}[G(u_{t+n-1}, h_1(u_{t+n-1})) - G(u_{t+n-1}, h(u_{t+n-1}))] - B^{-1}[h_1(Au_{t+n-1} + F(u_{t+n-1}, h_1(u_{t+n-1}))) - h_1(Au_{t+n-1} + F(u_{t+n-1}, h(u_{t+n-1}))) + h_1(Au_{t+n-1} + F(u_{t+n-1}, h(u_{t+n-1}))) - h(Au_{t+n-1} + F(u_{t+n-1}, h(u_{t+n-1})))].$$

Piemērojot normas un izmantojot trijstūra nevienādību, iegūst

$$|h_1(u_{t+n-1}) - h(u_{t+n-1})| \leq \|B^{-1}\| \|G\|_{X_{u_{t+n-1}, v_{t+n-1}}} |h_1(u_{t+n-1}) - h(u_{t+n-1})| + \|B^{-1}\| \|h_1\| \|G\|_{X_{u_{t+n-1}, v_{t+n-1}}} |h_1(u_{t+n-1}) - h(u_{t+n-1})| + \|B^{-1}\| \|h_0\| |h_0(Au_{t+n-1} + F(u_{t+n-1}, h(u_{t+n-1}))) - h(Au_{t+n-1} + F(u_{t+n-1}, h(u_{t+n-1})))|.$$

$G$  un  $h_I$  attēlojumu īpašības ļauj  $X_{u_{t+n-1}, v_{t+n-1}}$  apgabalu izvēlēties tā, lai

$$1 - \|B^{-1}\| \|G\|_{X_{u_{t+n-1}, v_{t+n-1}}} - \|B^{-1}\| \|G\|_{X_{u_{t+n-1}, v_{t+n-1}}} \|h_1\| > 0;$$

tādēdāji

$$|h_2(u_{t+n-1}) - h(u_{t+n-1})| \leq \left( 1 - \|B^{-1}\| \cdot \|G\|_{X_{u_{t+n-1}, v_{t+n-1}}} - \|B^{-1}\| \cdot \|G\|_{X_{u_{t+n-1}, v_{t+n-1}}} \cdot \|h_1\|_{U_{u_{t+n-1}}} \right)^{-1} \|B^{-1}\| \cdot |h_1(u_{t+n-1}) - h(u_{t+n-1})|.$$

No šīs nevienādības izriet, ka attālums starp  $h_2$  tuvinājumu un  $h$  precīzo atrisinājumu punktā  $u_{t+n-1}$  ir tās pašas kārtas kā attālums starp  $h_I$  un  $h$  tikai punktā  $u_{t+n}$ , kas kopumā ir tuvāks sākumpunktam nekā  $u_{t+n-1}$  tā stabilitātes dēļ.

Citiem vārdiem –  $h_2$  attēlojums ir tās pašas kārtas tuvinājums kā  $h_I$ , tikai lielākā definīcijas apgabalā.

Turpinot šādu rekurentu procedūru vēl tālāk, iegūst tuvinātu kontrolfunkciju virkni

$$h_i(u) = -B^{-1}G(u, h_i(u)) - B^{-1}h_{i-1}(Au + F(u, h_i(u))), \quad i = 1, 2, \dots,$$

pieaugošos apgabalos, t.i.,  $U_{u, i-1} \subset U_{u, i}$ , un ar jebkuru iepriekš definētu precizitāti.

Algoritmu iespējams turpināt, kamēr ir spēkā nevienādības

$$\left(1 - \|B^{-1}\| \|G\|_{X_{u_i, r_{v,i}}} - \|B^{-1}\| \|G\|_{X_{u_i, r_{v,i}}} \|h_i'\| \right) > 0 \quad \text{un}$$

$$|Au_{t+n-i} + F(u_{t+n-i}, h(u_{t+n-i}))| < |u_{t+n-i}|, \quad i = 1, 2, \dots.$$

B pielikums sniedz pierādījumus par šo tuvināto kontrolfunkciju esamību un to konvergenci uz precīzo atrisinājumu.

## 2.6. Iztirzājums

Ja ir tuvinātais attēlojums  $h_i$ , iespējams rekonstruēt [6] – [7] kontrolfunkciju, kas izteikta ar sākotnējiem mainīgajiem, izmantojot  $Z$  pārveidojumu no [12], kā

$$\begin{pmatrix} z_t \\ x_t \\ y_t \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} u_t \\ h_i(u_t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}.$$

Kontrolfunkcija  $y(u_t) = h_i(x(u_t), z(u_t))$  tiek noteikta kā parametriska funkcija ar  $u_t$  parametru

$$y_t = Z_3 \begin{pmatrix} u_t \\ h_i(u_t) \end{pmatrix} + \bar{y},$$

bet stāvokļa mainīgā dinamiku izsaka ar

$$x_{t+1} = Z_2 \begin{pmatrix} Au_t + F(u_t, h_i(u_t)) \\ h_i(Au_t + F(u_t, h_i(u_t))) \end{pmatrix} + \bar{x},$$

kur  $Z_2$  ir viens no  $Z$  matricas sadalījuma blokiem:

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix}.$$

D. Liptons (*D. Lipton*), Dž. Poterba (*J. Poterba*), Dž. Sakss (*J. Sachs*) u.c. (33) ierosina nelineāru racionālo gaidu modeļu atrisinājumos izmantot vairākkārtējās šaušanas metodes. Šaušanas metodes aprēķini ir nestabili šo modeļu seglu punkta īpašības dēļ. Nepareizi uzminot algoritma sākumvērtības, iegūst galavērtības ar ļoti lielām kļūdām. Turpretī šajā pētījumā piedāvātajā metodē nestabilitātei, kuru nosaka pēc  $B^{-1}$  operatora normas, ir pozitīva nozīme, jo tā paātrina aprēķinu procesa konvergenci un paplašina atrisinājumu definīcijas apgabalu.

$L$  konstante [17] ir  $G$  un  $F$  attēlojumu Lipšica konstanšu augšējā robeža. Tādējādi visās iepriekš minētajās aplēsēs  $\|G\|_{X_{u,0,r_v,0}}$  un  $\|F'\|_{X_{u,0,r_v,0}}$  locekļus var aizvietot ar  $L$ .

Šā iemesla dēļ no stabila stāvokļa šiem attēlojumiem diferencējamības vietā var piemērot Lipšica nepārtrauktības nosacījumu. Tas nozīmē, ka piedāvātā pieeja kontrolfunkciju konstruēšanā neprasa, lai izmantotie attēlojumi būtu diferencējami, tāpēc šī metode spēj pārvarēt tādas nediferencējamības problēmas kā nulles zemākā robeža.

Apkopojot var teikt, ka piedāvātās metodes algoritms sastāv no šādiem soļiem.

Atrod stabila līdzsvara stāvokli.

Linearizē [3] sistēmu ap stabilā līdzsvara stāvokli.

Pārveido sistēmu, ieviešot jaunus mainīgos  $u$  un  $v$ , kas atbilst attiecīgi stabīlai un nestabīlai apakštelpai.

Izveido stabīlu varietāti ap transformētās sistēmas stabilā līdzsvara stāvokli, izmantojot saspiedošo attēlojumu iterācijas.

Atgriežas pie sākotnējiem mainīgajiem  $x$ ,  $y$  un  $z$  ar  $Z$  transformāciju.

Algoritms ir viegli izpildāms, jo tā 1., 2., 3. un 5. soli var izpildīt, izmantojot esošo programmatūru, piemēram, *Dynare*. 4. solis ir viegli izpildāms, jo tajā iesaistītas tikai  $G$  un  $F$  attēlojumu vērtības ar dažādām argumentu vērtībām. Ja attēlojuma iterāciju vietā izmanto Ņūtona metodi, aprēķina procesa konverģenci iespējams būtiski paātrināt. Tomēr Ņūtona metode nozīmē augstākas prasības attiecībā uz attēlojumu gluduma pakāpi. Turklāt algoritma konverģences apgabals var būt mazāks.

## 2.7. Saistība ar pagarinātās trajektorijas metodi

Pastāv interesanta saistība starp  $h_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , attēlojumiem un R. Fēra un Dž. Teilora (16) piedāvāto pagarinātās trajektorijas metodi. Pieņem, ka mainīgais  $x_t$  ir eksogēns, t.i.,  $F(x, y) = F(x)$ . Tad [14] transformētajai sistēmai piemērotajai pagarinātās trajektorijas metodei ir šādi soļi.

Fiksē  $n$  horizontu un galavērtību  $y_{t+n+1} = 0$ .

Izsaka minējumu  $Y_{n,t+i}^0 = 0$ , ( $i = 1, \dots, n$ ).

Ja  $Y_{n,t+i}^j$  ir  $y_{t+i}$  tuvinājums  $j$  iterācijā, nākamo atkārtojumu  $Y_{n,t+i}^{j+1}$  netieši definē I tipa iterācija (saskaņā ar R. Fēra un Dž. Teilora apzīmējumu). Tādējādi

$$Y_{n,t+i}^{j+1} = -B^{-1}G(x_{t+i}, Y_{n,t+i}^{j+1}) + B^{-1}Y_{n,t+i+1}^{j+1}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Atkārti 4. soli attiecībā uz  $j$ ,  $j = 1, \dots, T$ . Šīs iterācijas sauc par II tipa iterācijām.

Pirmās II tipa iterācijas (t.i.,  $j = 1$ ) rezultātā iegūst tuvinājumu

$$Y_{n,t+i}^1 = h_1(x_{t+i}), \quad i = 0, \dots, n.$$

Tāpēc  $Y_{n,t+i}^1$  vērtība ir vienāda ar  $h_1$  attēlojuma vērtību  $x_{t+i}$  punktā. Veicot  $n$  skaitu II tipa iterāciju, iegūst

$$Y_{n,t}^n = h_n(x_t), \quad Y_{n,t+1}^n = h_{n-1}(x_{t+1}), \quad \dots, \quad Y_{n,t+i}^n = h_{n-i}(x_{t+i}), \quad \dots, \quad Y_{n,t+n}^n = h_0(x_{t+n}) = 0.$$

Tas nozīmē, ka, veicot II tipa iterācijas, pagarinātās trajektorijas metodes atrisinājumu vērtības laikā  $t+i$  ir vienādas ar  $h_i$  attēlojumu vērtībām attiecīgi  $x_{t+i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  punktos. Citiem vārdiem –  $h_i$  attēlojuma vērtība  $x_{t+i}$  punktā atbilst Fēra–Teilora atrisinājumam laikā  $t+i$ .



Dž. E. Gaņons (*J. E. Gagnon*) un Dž. B. Teilors (18) min, ka nav pierādījumu par to, ka pagarinātās trajektorijas metode konverģē uz nelineāro modeļu precīzo racionālo gadu atrisinājumu. Pētījumā piedāvāto pieeju iespējams tiešā veidā izmantot kā vispārēju un stabilu pierādījumu attiecībā uz pagarinātās trajektorijas metodes konverģenci (sk. B pielikumu). Turklāt piedāvātajai metodei salīdzinājumā ar Fēra–Teilora pieeju ir vēl citas priekšrocības. Pirmkārt, stabilās varietātes metodes konverģences apgabals ir plašāks salīdzinājumā ar tradicionālo pagarinātās trajektorijas metodi. Proti, ja attēlojumu  $F$  un  $G$  jakobiāns stabila līdzsvara stāvoklī nav nulle<sup>5</sup>, parasti saspiedošo attēlojumu teorēmā iesaistītā operatora (sīkāku informāciju sk. B pielikumā) Lipšica konstante sasniedz vērtību 1 mazākā lodē  $U_r$ , nekā tas notiek, izmantojot piedāvāto pieeju, kurā jakobiāni stabilā līdzsvara stāvoklī ir nulle koordinātes pārveidojuma [12] dēļ. Ja operatora Lipšica konstante ir lielāka par 1 vai vienāda ar 1, šis operators kļūst nespiedošs, un tādējādi iespējams, ka problēmai nav atrisinājuma.

Otrkārt, līdzīga iemesla dēļ algoritms konverģē ātrāk nekā pagarinātās trajektorijas metode. Proti, izmantojot piedāvāto metodi, Lipšica konstante noteiktā apgabalā salīdzinājumā ar Fēra–Teilora metodi<sup>6</sup> ir mazāka.

### 3. STOHAŠTISKAIS GADĪJUMS

Šajā nodaļā īsumā aplūkots, kā iepriekšējā nodaļā iegūtos rezultātus iespējams izmantot arī stohastiskajā gadījumā. Vienkāršības labad atmet endogēno stāvokļa mainīgo  $x_t$  stāvokļa mainīgo vektoru un atstāj tikai eksogēnos stāvokļa mainīgos  $z_t$  modelī [4] – [5]. Konkrēti aplūko sistēmu

$$E_t f(y_{t+1}, y_t, z_t, \varepsilon_{t+1}) = 0 \quad [26],$$

$$z_{t+1} = \Lambda z_t + \sigma \varepsilon_{t+1}, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \Omega) \quad [27].$$

Stipri līdzīgā veidā un ar tiem pašiem nosacījumiem kā 2.3. sadaļā var transformēt [26] – [27] sistēmu, ieviešot jaunus mainīgos  $u_t$  un  $v_t$ , kas atbilst attiecīgi stabilai un nestabilai apakštelpai. Transformētajai sistēmai ir šāda forma:

$$\begin{aligned} u_{t+1} &= \Lambda u_t + \sigma \varepsilon_{t+1}, \\ E_t v_{t+1} &= B v_t + E_t G(u_t, v_t, v_{t+1}, \sigma \varepsilon_{t+1}), \end{aligned}$$

kur  $G$  attēlojums ir nepārtraukti diferencējams un kopā ar tā pirmajiem atvasinājumiem tuvojas nullei punktā  $(0,0,0,0)$ . Jāievēro, ka pretēji deterministiskajam gadījumam šeit praktiski nav iespējams iegūt tādu [14] atveidojumu, kur  $G$  attēlojums nav atkarīgs no  $v_{t+1}$ . Piemēram, mainīgā lieluma reizinājumu ar atlikuma locekli  $E_t(v_{t+1}\varepsilon_{t+1})$  nav iespējams sadalīt.

Izmantojot iepriekšējā nodaļā lietoto argumentāciju, var parādīt, ka pastāv tāds  $U_{r_{u,1}}$  attēlojums  $h_l$  uz  $V_{r_{v,1}}$ , ka

<sup>5</sup> Tā notiek gadījumā, kad Fēra–Teilora metodi piemēro vispārējos racionālo gaidu modeļos.

<sup>6</sup> Saskaņā ar saspiedošo attēlojumu teorēmu var viegli secināt, ka, jo mazāka Lipšica konstante, jo ātrāka konverģence uz fiksēto punktu.

$$h_1(u_t, \sigma) = -B^{-1}E_t G(u_t, h_1(u_t, \sigma), 0, \sigma \varepsilon_{t+1}).$$

Turklāt pastāv attēlojumu virkne  $h_i : U_{r_{u,i}} \rightarrow V_{r_{v,i}}, i = 2, 3, \dots$ ,

$$h_{i+1}(u_t, \sigma) = -B^{-1}E_t G(u_t, h_{i+1}(u_t), h_i(\Lambda u_t + \sigma \varepsilon_{t+1}), \sigma \varepsilon_{t+1}) + B^{-1}E_t h_i(\Lambda u_t + \sigma \varepsilon_{t+1}),$$

kur  $U_{r_{u,i}}$  un  $V_{r_{v,i}}$  ir lodes attiecīgi  $R^{n_z}$  un  $R^{n_y}$ .

Līdzīgi kā H. Czjiņa un K. L. Džada (24) gadījumā ar zināmas regularitātes nosacījumu, izmantojot netieši uzdotās funkcijas teorēmu, var pierādīt, ka  $h_{i,\sigma}, i \in N$  attēlojumi nepārtraukti atkarīgi no  $\sigma$  parametra. Turklāt  $h_{i,\sigma}$  tiecas uz  $h_i C^0$  topoloģijā kā  $\sigma \rightarrow 0$ , kur  $h_i$  ir deterministiskajam gadījumam atbilstošie attēlojumi.

Jāatzīmē, ka no praktiskā viedokļa, lai iegūtu  $h_i, i = 1, 2, \dots$  attēlojumus stohastiskā modeļa gadījumā, 2.4. sadaļā minētā algoritma 4. solī nav iespējams tieši izmantot iterācijas metodes. Tomēr analogija ar pagarinātās trajektorijas metodi liek domāt, ka S. Adžemjana un M. Žilāra (2) piedāvāto pieeju, ko sauc par stohastisko pagarinātās trajektorijas pieeju, iespējams izmantot arī šajā gadījumā. Šī pieeja nozīmē to, ka nosacītās gaidas tiek aprēķinātas, izmantojot kvadrātūras vai arī kādus stohastiskās simulācijas algoritmus. Vēl viena iespēja būtu paplašināt  $h$  kontrolfunkciju  $\sigma$  pakāpēs.

#### 4. NEOKLASISKĀ IZAUGSMES MODEĻA PIEMĒRS

Šajā nodaļā iepriekš aplūkotā metode piemērota neoklasiskajam izaugsmes modelim (sk. Broka–Mermena modeli (11)). Aplūko deterministisku vienas nozares izaugsmes modeli ar neelastīgu darbaspēka piedāvājumu. Reprezentatīvais aģents maksimizē starplaiku derīguma funkciju

$$\max_{\{c_t, k_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} E_0 \{ \beta^t \ln(c_t) \}$$

atkarībā no

$$c_t + k_{t+1} = k_t^\alpha.$$

Izmantojot resursu ierobežojumu, lai aizstātu patēriņu, iegūst šādu līdzsvara nosacījumu:

$$\frac{1}{k_t^\alpha - k_{t+1}} = \beta \frac{\alpha}{(k_{t+1}^\alpha - k_{t+2})k_{t+1}^{1-\alpha}}.$$

Šim modelim pastāv analītisks kontrolfunkcijas atrisinājums, ko izsaka

$$k_{t+1} = \tilde{h}(k_t) = \alpha \beta k_t^\alpha.$$

Aprēķina tuvinājumus stāvokļa mainīgā līmenī (nevis logaritmā), citādi problēma kļūst triviāli lineāra. Parametra vērtības iegūst standarta vērtības, proti:  $\alpha = 0.36$ ,  $\beta = 0.99$ . Tādējādi kalibrēšanas vajadzībām kapitāla stabila līdzsvara stāvoklis ir

$\bar{k} = (\alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}} = 0.20$ . Nav grūti saskatīt, ka precīzā atrisinājuma (sk. Dž. Lombardo (35)) izvīzījums Teilora rindā konverģē intervālā  $(0, 2\bar{k})$ .

Tagad pārbauda iepriekš aplūkoto metožu precizitāti. Tā kā modelim ir slēgtas formas atrisinājums, var pārbaudīt katra tuvinātā atrisinājuma precizitāti salīdzinājumā ar precīzo atrisinājumu. Tā kā mūs galvenokārt interesē, vai tuvinājums ir globāli pareizs, salīdzina dažādu atrisinājumu precizitāti punktos, kas atrodas tuvu Teilora rindas konverģences intervāla galapunktiem vai šajos punktos: proti, attiecīgi  $k = 0.05$ ,  $k = 2\bar{k} \pm 0.05$  un  $k = 2\bar{k}$ . Viens punkts ( $k = 0.9$ ) izvēlēts tālu no Teilora rindas konverģences intervāla un tādējādi arī no stabilā līdzsvara stāvokļa.

1. tabulā parādītas saskaņā ar piedāvāto metodi konstruēto  $h_1$ ,  $h_2$  un  $h_3$  funkciju un pirmās, otrās, piektās un 16. kārtas izvīzījumu Teilora rindā relatīvās kļūdas procentu punktos. Aplūko arī pirmo iterāciju  $h_1$  funkcijas tuvinājumā un apzīmē šo funkciju ar  $h_{1,1}$ .  $h_{1,1}$  funkciju iespējams iegūt, ievietojot  $v = 0$  [20]:

$h_{1,1} = -B^{-1}G(u, 0)$ . Šīs funkcijas tieši šī forma aplūkota A pielikumā.

1. tabulā parādīts, ka vislielākā precizitāte visos aplūkotajos punktos ir  $h_3$  funkcijai. Pat punktos, kas atrodas Teilora rindas konverģences apgabalā, tā ir precīzāka par 16. kārtas izvīzījumu Teilora rindā. Arī  $h_2$  funkciju raksturo ļoti augsta precizitāte, un tās maksimālā relatīvā kļūda ir tikai 0.1% punktā  $k = 0.05$ .  $h_1$  funkcija ir precīzāka par piektās kārtas izvīzījumu Teilora rindā punktos, kas atrodas šo izvīzījumu konverģences apgabalā.  $h_{1,1}$  funkcija, kas ir visvienkāršākais no aplūkotajiem atrisinājumiem (izņemot lineāro atrisinājumu), nodrošina samērā labu tuvinājumu punktā  $k = 0.05$ ,  $2\bar{k}$ ,  $2\bar{k} - 0.05$  un  $2\bar{k} + 0.05$ . Šī tuvinājuma precizitāte ir salīdzināma ar piektās kārtas izvīzījumu Teilora rindā un būtiski augstāka par otrās kārtas izvīzījumu Teilora rindā punktos, kas atrodas Teilora rindas konverģences intervālā. Punktā  $k = 0.9$ , kas atrodas tālu no stabilā līdzsvara stāvokļa,  $h_1$ ,  $h_2$ , un  $h_3$  funkcija nodrošina ļoti labu precizitāti: tuvinājuma kļūda ir attiecīgi 1%, 0.03% un 0.003%. Turpretī izvīzījumu Teilora rindā precizitāte šajā punktā ir ļoti vāja.

Rezultātus papildina 2. attēls. Kapitāla kontrolfunkcijas dažādus atrisinājumus zīmē, ierobežojot  $k_t$  argumentu  $[0, 5\bar{k}]$  intervālā. Visi tuvinājumi ir samērā tuvi precīzajam atrisinājumam rādiusa  $0.25\bar{k} = 0.05$  stabila līdzsvara stāvokļa apkārtnē. Pirmās un otrās kārtas izvīzījumi Teilora rindā sāk atšķirties no precīzā atrisinājuma ārpus intervāla  $[0.1, 0.3]$ . Piektās un 16. kārtas Teilora rindas tuvinājumi ir precīzi intervālā  $[0, 0.40]$  – t.i., Teilora rindas izvīzījumu konverģences apgabalā. Tomēr ārpus intervāla tie eksplodē.  $h_1$  funkcija nodrošina ļoti lielu precizitāti visā intervālā.  $h_{1,1}$  funkcija ir samērā precīza intervālā  $[0.05, 0.5]$ .  $h_2$  atrisinājumu pamatā nav iespējams atšķirt no precīzā atrisinājuma visiem  $k_{t-1}$ , tādējādi tas nodrošina perfektu globālo tuvinājumu (šā iemesla dēļ  $h_3$  grafiks, kurš arī neatšķiras no  $h$  grafika, tiek atmests). Vēl viena  $h_{1,1}$ ,  $h_1$  un  $h_2$  funkcijas īpašība, kas nodrošina to būtisku atšķiršanos no izvīzījumiem Teilora rindā, ir tā, ka funkcijas saglabā precīzā atrisinājuma formu (t.i., tās monotoni pieaug un ieliecas). Šī īpašība nav pārsteidzoša. Būtībā  $h_{1,1}$ ,  $h_1$  un  $h_2$  funkcija netieši satur visu informāciju par precīzā atrisinājuma  $h$  globālo dinamiku, turpretī Teilora rinda satur tikai informāciju par  $h$  lokālo dinamiku.

1. tabula

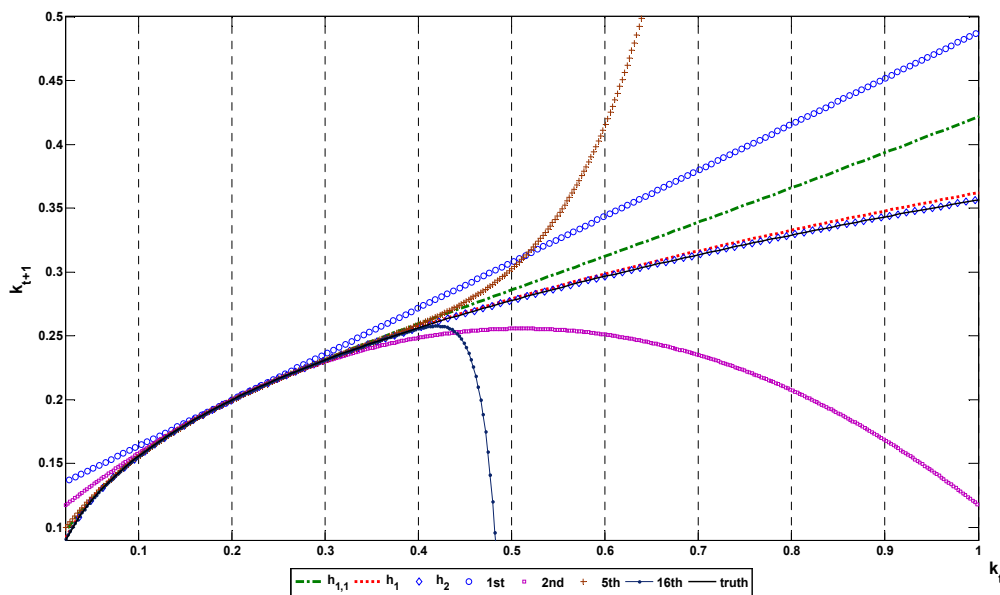
Tuvināto atrisinājumu relatīvās kļūdas dažādos punktos

Modelis	0.05	$2\bar{k} - 0.05$	$2\bar{k}$	$2\bar{k} + 0.05$	0.9
ASM					
$h_{1,1}$	0.81	0.62	1.26	2.03	15.14
$h_1$	0.94	0.17	0.28	0.37	0.96
$h_2$	0.10	0.01	0.03	0.02	0.03
$h_3$	0.02	0.001	0.01	0.004	0.003
Izvirzījumu Teilora rindā kārtā					
1.	20.2	3.64	4.73	8.26	31.45
2.	9.44	-1.40	-3.01	-5.44	-51.90
5.	1.67	0.20	1.02	3.35	711.98
16.	0.02	-0.002	-0.20	-8.59	-1.65E+06

Piezīmes. 1) TSV – tuvinātās stabilās varietātes. 2) Relatīvās kļūdas noteiktas procentu punktos.

2. attēls

Dažādu tuvinājumu kontrolfunkcijas



## SECINĀJUMS

Šis pētījums piedāvā jaunu metodi nelineāru racionālo gaidu modeļu atrisinājumu konstruēšanai nelokālos apgabalos. Metode izmanto secīgu tuvinājumu procedūru, kurā iesaistītas tikai nelineāro locekļu vērtības. Šāda pieeja ļauj iegūt tuvināto atrisinājumu precizitātes un apgabala novērtējumu. Pēc būtības piedāvātie atrisinājumi ir nelokāli un nevar eksplodēt. Ar to šāda pieeja atšķiras no perturbāciju metodēm. Pretēji projekciju metodēm piedāvātais algoritms atrod kontrolfunkciju tikai vairākos uz priekšu vērsto atrisinājumu punktos, nevis visā definīcijas apgabalā. Šī iezīme nozīmē to, ka salīdzinājumā ar aprēķiniem projekciju metožu gadījumā tiek patērēts mazāk laika. Šādu pieeju vēlams izmantot, lai aprēķinātu konkrētu nekļūdīgas paredzēšanas atrisinājumu, piemēram, atrisinājumu ar konkrētiem sākuma nosacījumiem (konkrēta impulsa reakcijas funkcija).

Piemērojot metodi neoklasiskajam izaugsmes modelim, redzams, ka piedāvātie atrisinājumi ir tikpat precīzi kā augstākās kārtas izvirzījumi Teilora rindā lokāli un noteikti daudz precīzāki globāli (t.i., tālu no stabilā līdzsvara stāvokļa). Turklāt atrisinājumi manto tādas precīzā atrisinājuma īpašības kā monotonitāte un konkavitāte. Tā kā metodes izmantošana ir vienkārša, algoritmu iespējams iestrādāt kādā no esošajām programmatūras platformām (piemēram, *Dynare*), tādējādi to var piemērot sarežģītākiem modeļiem.

Tā kā algoritma pieejā izmantotie attēlojumi prasa mazāk ierobežojošus nosacījumus par diferencējamību (t.i., Lipšica nepārtrauktība), metode principā spēj pārvarēt nulles zemākās robežas problēmu. Teorētiski metodi iespējams samērā vienkārši izmantot arī stohastiska modeļa gadījumā. Pieejas praktiskā piemērošana stohastiskiem modeļiem šajā pētījumā nav aplūkota.



## PIELIKUMI

### A pielikums. Neoklasiskais izaugsmes modelis

Reprezentatīvais aģents maksimizē

$$\max_{\{c_t, k_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} E_0 \{ \beta^t \ln(c_t) \} \quad [\text{A1}]$$

atkarībā no

$$c_t + k_{t+1} = k_t^\alpha \quad [\text{A2}].$$

Izmantojot resursu ierobežojumu, lai aizstātu patēriņu, iegūst šādu līdzsvara nosacījumu:

$$\frac{1}{k_t^\alpha - k_{t+1}} = \beta \frac{\alpha}{(k_{t+1}^\alpha - k_{t+2})k_{t+1}^{1-\alpha}} \quad [\text{A3}].$$

Kontrolfunkcijas precīzu atrisinājumu dod

$$k_{t+1} = \alpha \beta k_t^\alpha \quad [\text{A4}].$$

Apvēršot [A3], iegūst

$$k_t^\alpha - k_{t+1} = \frac{1}{\beta \alpha} (k_{t+1}^\alpha - k_{t+2}) k_{t+1}^{1-\alpha}.$$

Izsakot  $k_{t+2}$  kā  $k_{t+1}$  un  $k_t$  funkciju, iegūst

$$k_{t+2} = \frac{(1 + \alpha \beta) k_{t+1} - \alpha \beta k_t^\alpha}{k_{t+1}^{1-\alpha}} \quad [\text{A5}].$$

Ņemot vērā stabilā līdzsvara stāvokli

$$\bar{k} = (\alpha \beta)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad [\text{A6}],$$

iegūst

$$\hat{k}_{t+2} = (1 + \alpha \beta) (\bar{k} + \hat{k}_{t+1})^\alpha - \frac{\alpha \beta (\bar{k} + \hat{k}_t)^\alpha}{(\bar{k} + \hat{k}_{t+1})^{1-\alpha}} - \bar{k} \quad [\text{A7}].$$

[A7] vienādojumu var izteikt kā

$$\hat{k}_{t+2} = (1 + \alpha \beta) \bar{k}^\alpha \left(1 + \frac{\hat{k}_{t+1}}{\bar{k}}\right)^\alpha - \frac{\alpha \beta \bar{k}^\alpha \left(1 + \frac{\hat{k}_t}{\bar{k}}\right)^\alpha}{\bar{k}^{1-\alpha} \left(1 + \frac{\hat{k}_{t+1}}{\bar{k}}\right)^{1-\alpha}} - \bar{k} = f(\hat{k}_{t+1}, \hat{k}_t) \quad [\text{A8}].$$

Tālāk izvelk [A8] vienādojuma labās puses lineāro daļu:

$$\begin{aligned}
 f(\hat{k}_{t+1}, \hat{k}_t) &= (1 + \alpha\beta)\bar{k}^\alpha \left(1 + \alpha \frac{\hat{k}_{t+1}}{\bar{k}} + o(\hat{k}_{t+1})\right) - \frac{\alpha\beta\bar{k}^\alpha \left(1 + \alpha \frac{\hat{k}_t}{\bar{k}} + o(\hat{k}_t)\right)}{\bar{k}^{1-\alpha} \left(1 + (1-\alpha) \frac{\hat{k}_{t+1}}{\bar{k}} + o(\hat{k}_{t+1})\right)} - \bar{k} \\
 &= (1 + \alpha\beta)\bar{k}^\alpha + (1 + \alpha\beta)\bar{k}^\alpha \alpha \frac{\hat{k}_{t+1}}{\bar{k}} - \frac{\alpha\beta\bar{k}^\alpha}{\bar{k}^{1-\alpha}} \left(1 + \alpha \frac{\hat{k}_t}{\bar{k}}\right) [1 - (1-\alpha) \frac{\hat{k}_{t+1}}{\bar{k}}] + o(\hat{k}_t, \hat{k}_{t+1}) - \bar{k} \\
 &= (1 + \alpha\beta)\bar{k}^\alpha - \frac{\alpha\beta\bar{k}^\alpha}{\bar{k}^{1-\alpha}} + (1 + \alpha\beta)\bar{k}^\alpha \alpha \frac{\hat{k}_{t+1}}{\bar{k}} - \frac{\alpha^2\beta}{\bar{k}^{2(1-\alpha)}} \hat{k}_t + (1-\alpha) \frac{\hat{k}_{t+1}}{\bar{k}^{2(1-\alpha)}} + o(\hat{k}_t, \hat{k}_{t+1}) - \bar{k}.
 \end{aligned}$$

Ņemot vērā, ka  $\bar{k} = (1 + \alpha\beta)\bar{k}^\alpha - \frac{\alpha\beta\bar{k}^\alpha}{\bar{k}^{1-\alpha}}$  un  $\bar{k} = (\alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ , iegūst

$$\begin{aligned}
 f(\hat{k}_{t+1}, \hat{k}_t) &= (1 + \alpha\beta)\alpha \frac{\hat{k}_{t+1}}{\bar{k}^{1-\alpha}} - \frac{\alpha^2\beta}{\bar{k}^{2(1-\alpha)}} \hat{k}_t + (1-\alpha)\alpha\beta \frac{\hat{k}_{t+1}}{\bar{k}^{2(1-\alpha)}} + o(\hat{k}_t, \hat{k}_{t+1}) = \\
 &= (1 + \alpha\beta)\alpha \frac{\hat{k}_{t+1}}{\alpha\beta} - \frac{\alpha^2\beta}{(\alpha\beta)^2} \hat{k}_t + (1-\alpha)\alpha\beta \frac{\hat{k}_{t+1}}{(\alpha\beta)^2} + o(\hat{k}_t, \hat{k}_{t+1}) = (1 + \alpha\beta) \frac{\hat{k}_{t+1}}{\beta} - \frac{1}{\beta} \hat{k}_t + (1-\alpha) \frac{\hat{k}_{t+1}}{\alpha\beta} + o(\hat{k}_t, \hat{k}_{t+1}) = \\
 &= \left(\frac{1}{\beta} + \alpha + \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{1}{\beta}\right) \hat{k}_{t+1} - \frac{1}{\beta} \hat{k}_t + o(\hat{k}_t, \hat{k}_{t+1}) = \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \alpha\right) \hat{k}_{t+1} - \frac{1}{\beta} \hat{k}_t + o(\hat{k}_t, \hat{k}_{t+1});
 \end{aligned}$$

tādējādi [A8] vienādojumam ir šāda forma:

$$\hat{k}_{t+2} = -\frac{1}{\beta} \hat{k}_t + \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \alpha\right) \hat{k}_{t+1} + \left[ (1 + \alpha\beta)(\bar{k} + \hat{k}_{t+1})^\alpha - \frac{\alpha\beta(\bar{k} + \hat{k}_t)^\alpha}{(\bar{k} + \hat{k}_{t+1})^{1-\alpha}} - \bar{k} + \frac{1}{\beta} \hat{k}_t - \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \alpha\right) \hat{k}_{t+1} \right] \quad [\text{A9}].$$

Apzīmējot  $\hat{k}_{t+1}$  ar  $\hat{z}_t$ , [A9] vienādojumu var pārrakstīt kā šādu sistēmu:

$$\begin{aligned}
 \hat{k}_{t+1} &= \hat{z}_t, \\
 \hat{z}_{t+1} &= -\frac{1}{\beta} \hat{k}_t + \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \alpha\right) \hat{z}_t + N_1(\hat{k}_t, \hat{z}_t)
 \end{aligned} \quad [\text{A10}],$$

kur nelineārais loceklis ir

$$N_1(\hat{k}_t, \hat{z}_t) = (1 + \alpha\beta)(\bar{k} + \hat{z}_t)^\alpha - \frac{\alpha\beta(\bar{k} + \hat{k}_t)^\alpha}{(\bar{k} + \hat{z}_t)^{1-\alpha}} - \bar{k} - \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \alpha\right) \hat{z}_t + \frac{1}{\beta} \hat{k}_t.$$

Pārrakstot [A10] matricas formā, iegūst

$$\begin{bmatrix} \hat{k}_{t+1} \\ \hat{z}_{t+1} \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} \hat{k}_t \\ \hat{z}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ N_1(\hat{k}_t, \hat{z}_t) \end{bmatrix}, \quad [\text{A11}],$$

kur  $L$  matricai ir šāda forma:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\beta} & \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \alpha\right) \end{bmatrix}.$$

Tālāk  $L$  matrica tiek pārveidota Žordāna kanoniskā formā:

$$L = ZJZ^{-1}, \text{ kur}$$

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \frac{1}{\alpha\beta} \end{pmatrix},$$

$$Z^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha\beta} & -1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \frac{\alpha\beta}{1-\alpha^2\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\alpha^2\beta} & -\frac{\alpha\beta}{1-\alpha^2\beta} \\ -\frac{1}{\alpha^2\beta} & \frac{\alpha\beta}{1-\alpha^2\beta} \end{pmatrix}.$$

Pēc tam, kad ieviesti jauni mainīgie  $\begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix} = Z^{-1} \begin{bmatrix} \hat{k}_t \\ \hat{z}_t \end{bmatrix}$  un veikta [A11] vienādojuma priekšreizinašana ar  $Z^{-1}$ , var pārrakstīt [A5] vienādojumu kā

$$\begin{aligned} u_{t+1} &= Au_t + F(u_t, v_t) \\ v_{t+1} &= Bv_t + G(u_t, v_t) \end{aligned} \quad [\text{A12}],$$

kur

$$\begin{aligned} A &= \alpha, \quad B = 1/(\alpha\beta), \quad F(u_t, v_t) = Z^{12} N_1(Z_{11}u_t + Z_{12}v_t, Z_{21}u_t + Z_{22}v_t), \\ G(x_t, y_t) &= Z^{22} N_1(Z_{11}x_t + Z_{12}y_t, Z_{21}x_t + Z_{22}y_t) \end{aligned} \quad [\text{A13}],$$

kur savukārt  $Z_{ij}$  un  $Z^j$  ir attiecīgi  $Z$  un  $Z^{-1}$  matricas komponenti.

Tiešā formā [A12] sistēmu var pārrakstīt kā

$$\begin{aligned} u_{t+1} &= \alpha u_t - \frac{\alpha\beta}{1-\alpha^2\beta} \left[ (1+\alpha\beta)(\bar{k} + \alpha u_t + \frac{1}{\alpha\beta} v_t)^\alpha - \frac{\alpha\beta(\bar{k} + u_t + y_t)^\alpha}{(\bar{k} + \alpha u_t + \frac{1}{\alpha\beta} v_t)^{1-\alpha}} - \bar{k} - (\frac{1}{\alpha\beta} + \alpha)(\alpha u_t + \frac{1}{\alpha\beta} v_t) + \frac{1}{\beta}(u_t + v_t) \right] \\ v_{t+1} &= \frac{1}{\alpha\beta} v_t + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha^2\beta} \left[ (1+\alpha\beta)(\bar{k} + \alpha u_t + \frac{1}{\alpha\beta} v_t)^\alpha - \frac{\alpha\beta(\bar{k} + u_t + y_t)^\alpha}{(\bar{k} + \alpha u_t + \frac{1}{\alpha\beta} v_t)^{1-\alpha}} - \bar{k} - (\frac{1}{\alpha\beta} + \alpha)(\alpha u_t + \frac{1}{\alpha\beta} v_t) + \frac{1}{\beta}(u_t + v_t) \right]. \end{aligned}$$

Tad  $h_1(u_t)$  funkcija iegūst šādu formu:

$$h_1(u_t) = -\frac{(\alpha\beta)^2}{1-\alpha^2\beta} \left[ (1+\alpha\beta)(\bar{k} + \alpha u_t + \frac{1}{\alpha\beta} h_1(u_t))^\alpha - \frac{\alpha\beta(\bar{k} + u_t + h_1(u_t))^\alpha}{(\bar{k} + \alpha u_t + \frac{1}{\alpha\beta} h_1(u_t))^{1-\alpha}} - \bar{k} - (\frac{1}{\alpha\beta} + \alpha)(\alpha u_t + \frac{1}{\alpha\beta} h_1(u_t)) + \frac{1}{\beta}(u_t + h_1(u_t)) \right] \quad [\text{A14}].$$

$h_{1,1}$  funkciju iegūst, [A14] labajā pusē aizvietojojt nulles ar  $h_1(u_t)$ :

$$h_{1,1}(u_t) = -\frac{(\alpha\beta)^2}{1-\alpha^2\beta} \left[ (1+\alpha\beta)(\bar{k} + \alpha u_t)^\alpha - \frac{\alpha\beta(\bar{k} + u_t)^\alpha}{(\bar{k} + \alpha u_t)^{1-\alpha}} - \bar{k} - \alpha^2 u_t \right].$$

Tā kā  $h_i(u_t)$  attēlojums atgriežas pie sākotnējiem mainīgajiem, jāveic  $Z$  pārveidojums:

$$\begin{bmatrix} \hat{k}_t \\ \hat{k}_{t+1} \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} u_t \\ h_i(u_t) \end{bmatrix}.$$

Tādējādi  $\tilde{h}(\hat{k}_t)$  kontrolfunkcija iegūst šādu parametrisko atainojumu:

$$\begin{cases} \hat{k}_t = u_t + h_i(u_t); \\ \tilde{h}(\hat{k}_t) = \alpha u_t + \frac{1}{\alpha\beta} h_i(u_t) \end{cases} \quad [\text{A15}].$$

## B pielikums

Šī teorēma pierāda tuvinātu stabilo varietāšu virknes esamību.

### Teorēma

Pieņem, ka  $X_{r_u, r_v}$  ir tāds  $F$  un  $G$  attēlojumu definīcijas apgabals [14], ka spēkā ir šādi nosacījumi:

$$1) \frac{\|B^{-1}\| \|G\|_{X_{r_u, r_v}}}{1 - \|B^{-1}\|} < r_v;$$

$$2) \frac{1 - \|B^{-1}\| \|A\|}{4\|B^{-1}\|} > L,$$

kur

$$L = \max(\|G'\|_{X_{r_u, r_v}}, \|F'\|_{X_{r_u, r_v}}) \quad [\text{B1}];$$

stabilitātes nosacījums: ja  $(u_t, v_t) \in X_{r_u, r_v}$ ,  $u_{t+1} = Au_t + F(u_t, v_t) \in U_{r_u}$ .

Tādējādi pastāv attēlojumu virkne  $h_i : U_{r_u} \rightarrow V_{r_v}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , kas apmierina rekurentus vienādojumus:

$$h_i(u) = -B^{-1}G(u, h_i(u)) + B^{-1}h_{i-1}(Au + F(u, h_i(u))) \quad [\text{B2}]$$

ar sākuma nosacījumu, ka  $h_0 \equiv 0$ . Turklāt spēkā ir šādas nevienādības attiecībā pret  $h_i$  attēlojumu normu:

$$\|h_i\|_{U_r} \leq \left( \frac{1 - \|B^{-1}\|^{i+1}}{1 - \|B^{-1}\|} \right) \|B^{-1}\| \cdot \|G\|_{X_{r_u, r_v}} \leq r_u \quad [\text{B3}];$$

$$\|h_i'\|_{U_r} \leq \frac{1 - \|B^{-1}\| L}{\|B^{-1}\| L} \quad [\text{B4}].$$

### Komentārs

$X_{r_u, r_v}$  apkārtnē, kas apmierina 1., 2. un 3. nosacījumu, vienmēr pastāv lokāli, jo  $G(u, v)$  un  $F(u, v)$  attēlojumi kopā ar to pirmajiem atvasinājumiem vienmēr tiecas uz nulli punktā  $(0, 0)$ . Tomēr šie nosacījumi paši par sevi nav lokāli.

### Pierādījums

Pierādījumu sniedz indukcija pa  $i$ . Precīzāk – izmantojot saspiedošo attēlojumu teorēmu, veicot indukciju pa  $i \in N$ , iegūst tādu  $h_i$ , kas apmierina [B2]. Lai apmierinātu saspiedošo attēlojumu teorēmas nosacījumus, nepieciešama [B3] un



[B4] aplēse katram indukcijas posmam. Pieņem, ka  $i = 1$ , bet  $T_{1,u}$  ir tāds  $V_{r_v}$  parametrizēts attēlojums  $R^{n_y}$ , ka

$$T_{1,u}(v) = -B^{-1}G(u, v) \quad [\text{B5}]$$

attiecībā uz katru  $u \in U_{r_u}$ . Pieņem, ka  $T_{1,u}$  apmierina saspiedošo attēlojumu teorēmas (L. Jungkvists un T. Dž. Sārdžents (34)) nosacījumus attiecībā uz katru  $u$  parametru. Tātad pastāv tāds  $T_{1,u}$  fiksēts punkts  $h_1$ , ka

$$h_1(u) = -B^{-1}G(u, h_1(u)), \quad u \in U_{r_u} \quad [\text{B6}].$$

Apgalvo, ka  $T_{1,u}$  attēlo slēgto lodi  $V_{r_v}$  sevī un ka tā Lipšica konstante ir mazāka par 1, tādējādi tas atbilst saspiedošo attēlojumu teorēmas nosacījumiem. Jāievēro arī, ka  $h_1$  atkarība no  $u$  nosaka  $U_{r_u}$  attēlojumu uz  $R^{n_y}$ .

Ja  $h_1$  apmierina [B3] un [B4] nevienādības, indukcijas hipotēze attiecībā uz  $i = 1$  būs pierādīta. Tā, izmantojot [B5] abu pušu normu un 1. nosacījumu, iegūst

$$\|T_{1,u}\|_{V_{r_v}} = \|B^{-1}\| \cdot \|G\|_{X_{r_u, r_v}} \leq r_v \quad [\text{B7}].$$

Tas nozīmē, ka  $T_{1,u}$  attēlo  $V_{r_v}$  sevī. Tagad uzdevums ir parādīt, ka ir  $J_{1,u}$  saspiedums, t.i., ka  $T_{1,u}$  Lipšica konstante ir mazāka par 1.  $T_{1,u}$  jakobiāns ir

$$T'_{1,u}(v) = -B^{-1}G'_v(u, v) \quad [\text{B8}],$$

kur  $G'_v(u, v)$  ir  $G$  attēlojuma jakobiāns attiecībā pret  $v$  ( $u, v$ ) punktā. Ņemot vērā [B8] abu pušu normu un izmantojot [B1] ar 2. nosacījumu, iegūst

$$\|T'_{1,u}(v)\| \leq \|B^{-1}\| L < 1 \quad \text{visiem } (u, v) \in X_{r_u, r_v} \quad [\text{B9}].$$

$\|T'_{1,u}(v)\|$  norma ir  $T_{1,u}$  Lipšica konstantes augšējā robeža  $V_{r_v}$  apgabalā. Tā kā  $T_{1,u}$  attēlojuma Lipšica konstante ir mazāka par 1 un tas attēlo slēgto lodi  $V_{r_v}$  sevī, redzams, ka saskaņā ar saspiedošo attēlojumu teorēmu  $T_{1,u}$  operatoram  $V_{r_v}$  apgabalā ir fiksēts  $h_1$  punkts katram  $u \in U_{r_u}$ . Tas nozīmē, ka  $h_1$  attēlojums, ko nosaka [B6], pastāv. No [B7] izriet, ka  $\|h_1\|_{U_{r_u}} \leq r_v$ ; tādējādi  $h_1$  attēlojums apmierina teorēmas 3. nosacījumu. Vēl jāpārbauda, vai  $h_1$  atvasinājuma norma apmierina [B4] nevienādību.

Diferencējot [B6]  $u$ , iegūst

$$h_1(u)' = B^{-1}G'_u(u, h_1(u)) + B^{-1}G'_v(u, h_1(u))h_1'(u).$$

Piemērojot normas un izmantojot trijstūra nevienādību, iegūst

$$\|h_1(u)'\| \leq \|B^{-1}\| \cdot \|G'_u(u, h_1(u))\| + \|B^{-1}\| \cdot \|G'_v(u, h_0(u))\| \cdot \|h_1(u)\|, \quad u \in U_{r_u} \quad [\text{B10}].$$

Pārkārtojot [B10] locekļus un ņemot vērā [B1], kā arī definīcijas  $\|h_1'\|_{U_{r_u}}$  un  $\|G_u'\|_{X_{r_u, r_v}}$ , iegūst

$$\|h_1'\|_{U_{r_u}} \leq (1 - \|B\|^{-1}L)^{-1} \cdot \|B\|^{-1}L.$$

No 2. nosacījuma nepārprotami izriet, ka  $\|B\|^{-1}L < 1/2$ . Tas norāda, ka

$$\|h_1'\|_{U_{r_u}} < (1 - \|B\|^{-1}L) / \|B\|^{-1}L.$$

Tādējādi  $h_l$  apmierina [B4] nevienādību. Tātad attiecībā uz  $i = l$  izteiksmi induktīvais pieņēmums ir pierādīts.

Tālāk induktīvi pieņem, ka pastāv  $i$  attēlojumi  $h_k(u)$ ,  $k = 1, 2, \dots, i$ , kas apmierina 1.–3. nosacījumu.  $T_{i+1, u}$  būs tāds  $V_{r_v}$  parametrizētais attēlojums uz  $R^{n_y}$ , ka

$$T_{i+1, u}(v) = -B^{-1}G(u, v) + B^{-1}h_i(Au + F(u, v)) \quad [\text{B11}]$$

katram  $u \in U_{r_u}$ . Tāpat kā iepriekš parāda, ka  $T_{i+1, u}$  apmierina saspiedošo attēlojumu teorēmas nosacījumus. Tiešām – piemērojot [B11] normas un izmantojot trijstūra nevienādību, iegūst

$$\|T_{i+1, u}\|_{V_{r_v}} \leq \|B^{-1}\| \|G\|_{X_{r_u, r_v}} + \|B^{-1}\| \|h_i\|_{U_{r_u}} \quad [\text{B12}].$$

Saskaņā ar induktīvo pieņēmumu [B4] nevienādība ir spēkā, tāpēc

$$\|T_{i+1, u}\|_{V_{r_v}} \leq \|B^{-1}\| \|G\|_{X_{r_u, r_v}} + \|B^{-1}\| \left\| \frac{1 - \|B\|^{-i-1}}{1 - \|B\|^{-1}} \right\| \|B\|^{-1} \|G\|_{X_{r_u, r_v}} = \|B^{-1}\| \left\| \frac{1 - \|B\|^{-i-2}}{1 - \|B\|^{-1}} \right\| \|G\|_{X_{r_u, r_v}} \leq r_v \quad [\text{B13}],$$

kur pēdējā nevienādība izriet no 1. nosacījuma. Tas nozīmē, ka  $T_{l, u}: V_{r_v} \rightarrow V_{r_v}$  attiecībā pret visiem  $u \in U_{r_u}$ .  $T_{i+1, u}$  attēlojuma jakobiāns ir  $T'_{i+1, u}(v) = -B^{-1}G'_v(u, v) + B^{-1}h'_i(Au + F(u, v))F'_v(u, v)$ .

Ņemot normas, piemērojot 3. nosacījumu un [B1], iegūst

$$\|T'_{i+1, u}(v)\| \leq \|B^{-1}\|L + \|B^{-1}\| \|h'_i\|_{U_{r_u}} L \quad [\text{B14}]$$

visiem  $v \in V_{r_v}$ . Saskaņā ar induktīvo pieņēmumu  $\|h'_i\|_{U_{r_u}} \leq \frac{1 - \|B^{-1}\|L}{\|B^{-1}\|L}$ ; tādējādi

$$\|T'_{i+1, u_{r+n-i-1}}\| < 1.$$

Tā kā  $T_{i+1, u}(v)$  attēlojuma Lipšica konstante ir mazāka par 1 un tā attēlo  $V_{r_v}$  sevī, redzams, ka saskaņā ar saspiedošo attēlojumu teorēmu  $T_{i+1, u}$  attēlojumam ir fiksēts

punkts  $h_{i+l} \in V_{r_u}$  apgalabā katram  $u \in U_{r_u}$ . Tas nozīmē, ka pastāv tāds  $U_{r_u} h_{i+l}$  attēlojums uz  $V_{r_u}$ , ka

$$h_{i+l}(u) = -B^{-1}G(u, h_{i+l}(u)) - B^{-1}h_i(Au + F(u, h_{i+l}(u))) \quad [\text{B15}].$$

No [B12] izriet, ka

$$\|h_{i+l}\| \leq \left( \frac{1 - \|B\|^{-i-2}}{1 - \|B\|^{-1}} \right) \|B\|^{-1} \|G\|_{X_{r_u}, V_{r_u}}.$$

Tādējādi  $h_{i+l}$  attēlojums apmierina 1. nosacījumu. Lai pabeigtu induktīvo pieņēmumu attiecībā uz  $i+l$ , atliek pārbaudīt [B5] nevienādību attiecībā uz  $h_{i+l}$  attēlojuma atvasinājuma normu. Paņemot  $h_{i+l}$  atvasinājumu  $u$  punktā, iegūst

$$\begin{aligned} h_{i+l}'(u_{t+n-i-1}) &= -B^{-1}G'_x(u_{t+n-i-1}, h_{i+l}(u_{t+n-i-1})) - B^{-1}G'_y(u_{t+n-i-1}, h_{i+l}(u_{t+n-i-1})) \cdot h_{i+l}'(u_{t+n-i-1}) - \\ &- B^{-1}h_i'(Au_{t+n-i-1} + F(u_{t+n-i-1}, h_{i+l}(u_{t+n-i-1}))) \times \\ &\times (A + F'_u(u_{t+n-i-1}, h_{i+l}(u_{t+n-i-1})) + F'_v(u_{t+n-i-1}, h_{i+l}(u_{t+n-i-1})))h_{i+l}'(u_{t+n-i-1}). \end{aligned}$$

Piemērojot normas un izmantojot trijstūra nevienādību, iegūst

$$\begin{aligned} \|h_{i+l}'(u_{t+n-i-1})\| &\leq \|B^{-1}\| \|G'_x(u_{t+n-i-1}, h_{i+l}(u_{t+n-i-1}))\| + \|B^{-1}\| \|G'_y(u_{t+n-i-1}, h_{i+l}(u_{t+n-i-1}))\| \cdot \|h_{i+l}'(u_{t+n-i-1})\| + \\ &+ \|B^{-1}\| \|h_i'(Au_{t+n-i-1} + F(u_{t+n-i-1}, h_{i+l}(u_{t+n-i-1})))\| \cdot \|A + F'_u(u_{t+n-i-1}, h_{i+l}(u_{t+n-i-1}))\| + \\ &+ \|B^{-1}\| \|h_i'(Au_{t+n-i-1} + F(u_{t+n-i-1}, h_{i+l}(u_{t+n-i-1})))\| \cdot \|F'_v(u_{t+n-i-1}, h_{i+l}(u_{t+n-i-1}))\| \|h_{i+l}'(u_{t+n-i-1})\| \end{aligned}$$

attiecībā uz visiem  $u_{t+n-i-1} \in U_{r_u}$ .

Izmantojot trijstūra nevienādību, [B1] un 3. nosacījumu, iegūst

$$\|h_{i+l}'\|_{U_{r_u}} \leq \|B^{-1}\| \|L + \|B^{-1}\| \cdot L \cdot \|h_{i+l}'\|_{U_{r_u}} + \|B^{-1}\| \|h_i'\|_{U_{r_u}} \cdot (\|A\| + L) + \|B^{-1}\| \|h_i'\|_{U_{r_u}} \|L\| \|h_{i+l}'\|_{U_{r_u}}.$$

Pārnesot locekļus, kas satur  $\|h_{i+l}'\|_{U_{r_u}}$ , uz kreiso pusi, iegūst

$$\|h_{i+l}'\|_{U_{r_u}} \cdot (1 - \|B^{-1}\| \|L - \|B^{-1}\| \|L\| \|h_i'\|_{U_{r_u}}) \leq \|B^{-1}\| \cdot L \cdot \|B^{-1}\| \|h_i'\|_{U_{r_u}} \cdot (\|A\| + L).$$

Saskaņā ar induktīvo pieņēmumu  $\|h_i'\|$  apmierina [B5] nevienādību, tāpēc  $(1 - \|B^{-1}\| \|L - \|B^{-1}\| \|L\| \|h_i'\|_{U_{r_u}}) > 0$ . Tādējādi no tā izriet, ka

$$\|h_{i+l}'\|_{U_{r_u}} \leq \frac{\|B^{-1}\| \|L + \|B^{-1}\| \|h_i'\|_{U_{r_u}} \cdot (\|A\| + L)}{(1 - \|B^{-1}\| \|L - \|B^{-1}\| \|L\| \|h_i'\|_{U_{r_u}})} \quad [\text{B16}].$$

Tagad aplūko šādu starpības vienādojumu:

$$s_{i+1} = \frac{\rho + (\|B^{-1}\| \cdot \|A\| + \rho)s_i}{(1 - \rho - \rho s_i)} \quad [\text{B17}],$$

kur  $\rho = \|B^{-1}\|L$ .

### Lemma

Pieņem, ka

$$\rho < (1 - \|B^{-1}\| \cdot \|A\|)/4; \quad [\text{B18}].$$

Tad [B17] starpības vienādojumam ir divi fiksēti punkti:

$$s_1^* = \frac{1 - 2\rho - \|B^{-1}\| \cdot \|A\| - \sqrt{(1 - 2\rho - \|B^{-1}\| \cdot \|A\|)^2 - 4\rho^2}}{2\rho} \quad [\text{B19}]$$

un

$$s_2^* = \frac{1 - 2\rho - \|B^{-1}\| \cdot \|A\| + \sqrt{(1 - 2\rho - \|B^{-1}\| \cdot \|A\|)^2 - 4\rho^2}}{2\rho} \quad [\text{B20}],$$

tā ka

$$s_1^* \leq s_2^* < \frac{1 - \rho}{\rho} \quad [\text{B21}],$$

kur  $s_1^*$  ir stabils fiksēts punkts, bet  $s_2^*$  ir nestabils fiksēts punkts. Ja  $s_0 = 0$ ,  $s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  ir monotoni pieaugoša virkne, kas konverģē uz  $s_1^*$ .

### Pierādījums

Lemmu iespējams pierādīt ar tiešu aprēķinu.

[B18] nevienādība izriet no teorēmas 2. nosacījuma. Salīdzinot [B16] un [B17] sākumpunktam  $s_0 = 0$  un sākotnējam attēlojumam  $h_0 \equiv 0$ , iegūst

$s_i \geq \|h_i'\|$ ,  $i=1, 2, 3, \dots$ , t.i.,  $\|h_i'\|$  majorizē ar  $s_i$ . Ņemot vērā [B21], rezultātā iegūst

$$\|h_{i+1}'\| \leq s_1^* \leq \frac{1 - \rho}{\rho} = \frac{1 - \|B^{-1}\|L}{\|B^{-1}\|L}.$$

Tādējādi  $h_{i+1}$  attēlojums apmierina [B4] nevienādību. Tas noslēdz indukcijas argumentu un tādējādi arī teorēmas pierādījumu.

## LITERATŪRA

1. ADJEMIAN, Stéphane, BASTANI, Houtan, KARAMÉ, Frédéric, JUILLARD, Michel, MAIH, Junior, MIHOUBI, Ferhat, PERENDIA, George, PFEIFER, Johannes, RATTO, Marco, VILLEMOT, Sébastien. *Dynare: Reference Manual Version 4*. Dynare Working Paper, No. 1, CEPREMAP, April 2011. 100 p.
2. ADJEMIAN, Stéphane, JUILLARD, Michel. *Dealing with ZLB in DSGE Models. An Application to the Japanese Economy*. ESRI Discussion Paper Series, No. 258, December 2010. 30 p.
3. AJEVSKIS, Viktors, VĪTOLA, Kristīne. *Nekustamā īpašuma sektors un bankas mazas valsts ar atvērtu tautsaimniecību DSGE modelī*. Rīga : Latvijas Banka, 2011. Pētījums 3/2011. 63 lpp.
4. AMISANO, Gianni, TRISTANI, Oreste. *Euro Area Inflation Persistence in an Estimated Nonlinear DSGE Model*. European Central Bank Working Paper Series, No. 754, May 2007. 55 p.
5. AMISANO, Gianni, TRISTANI, Oreste. Exact Likelihood Computation for Nonlinear DSGE Models with Heteroskedastic Innovations. *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 35, issue 12, 2011, pp. 2167–2185.
6. ANDERSON, Gary S., MOORE, George. A Linear Algebraic Procedure for Solving Linear Perfect Foresight Models. *Economics Letters*, vol. 17, issue 3, 1985, pp. 247–252.
7. ANDREASEN, Martin M., FERNÁNDEZ-VILLAVÉRDE, Jesús, RUBIO-RAMÍREZ, Juan F. *The Pruned State-Space System for Non-Linear DSGE Models: Theory and Empirical Applications*. NBER Working Paper, No. 18983, April 2013. 65 p.
8. ARUOBA, Borağan S., FERNÁNDEZ-VILLAVÉRDE, Jesús, RUBIO-RAMÍREZ, Juan F. Comparing Solution Methods for Dynamic Equilibrium Economies. *Journal of Economic Dynamics and Control*, No. 30, 2006, pp. 2477–2508.
9. BINSBERGEN, Jules H. van, FERNÁNDEZ-VILLAVÉRDE, Jesús, KOIJEN, Ralph S. J., RUBIO-RAMÍREZ, Juan F. The Term Structure of Interest Rates in a DSGE Model with Recursive Preferences. *Journal of Monetary Economics*, No. 59, October 2012, pp. 634–648.
10. BLANCHARD, Olivier J., KAHN, Charles M. The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations. *Econometrica*, vol. 48, No. 5, July 1980, pp. 1305–1312.
11. BROCK, William A., MIRMAN, Leonard J. Optimal Economic Growth and Uncertainty: the Discounted Case. *Journal of Economic Theory*, No. 4, 1972, pp. 479–513.
12. CHRISTIANO, Lawrence J. Solving Dynamic Equilibrium Models by a Method of Undetermined Coefficients. *Computational Economics*, No. 20, issue 1–2, October 2002, pp. 21–55.

13. COLLARD, Fabrice, JUILLARD, Michel. Accuracy of Stochastic Perturbation Methods: the Case of Asset Pricing Models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, No. 25, 2001, pp. 979–999.
14. DEN HAAN, Wouter J., DE WIND, Joris. *How Well-Behaved are Higher-Order Perturbation Solutions?* De Nederlandsche Bank NV Working Paper, No. 240/2009, December 2009. 64 p.
15. DEN HAAN, Wouter J., DE WIND, Joris. Nonlinear and Stable Perturbation-Based Approximations. *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 36, issue 10, October 2012, pp. 1477–1497.
16. FAIR, Ray, TAYLOR, John. Solution and Maximum Likelihood Estimation of Dynamic Nonlinear Rational Expectations Models. *Econometrica*, vol. 51, issue 4, July 1983, pp. 1169–1185.
17. FERNÁNDEZ-VILLAVERDE, Jesús, GUERRÓN-QUINTANA, Pablo A., RUBIO-RAMÍREZ, Juan F., URIBE, Martin. Risk Matters: The Real Effects of Volatility Shocks. *American Economic Review*, No. 101 (6), 2011, pp. 2530–2561.
18. GAGNON, Joseph E., TAYLOR, John B. Solving Stochastic Equilibrium Models with the Extended Path Method. *Economic Modelling*, No. 7, July 1990, pp. 251–257.
19. GALOR, Oded. *Discrete Dynamical Systems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. 158 p.
20. GAVIN, William T., KEEN, Benjamin D., RICHTER, Alexander W., THROCKMORTON, Nathaniel A. *Global Dynamics at the Zero Lower Bound*. Federal Reserve Bank of St. Louis Working Paper Series, No. 2013-007C, October 2013. 28 p.
21. GOMME, Paul, KLEIN, Paul. Second-Order Approximation of Dynamic Models without the Use of Tensors. *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 35, issue 4, April 2011, pp. 604–615.
22. GRANDMONT, Jean-Michel. Nonlinear Difference Equations, Bifurcations and Chaos: An Introduction. *Research in Economics*, vol. 62, issue 3, 2008, pp. 122–177.
23. HARTMAN, Philip. *Ordinary Differential Equations*. New York : Wiley, 1982. 628 p.
24. JIN, He-Hui, JUDD, Kenneth L. *Perturbation Methods for General Dynamic Stochastic Models*. Stanford University Working Paper, April 2002. 44 p.
25. JUDD, Kenneth L. *Numerical Methods in Economics*. Cambridge : The MIT Press, 1998. 633 p.
26. KATOK, Anatole, HASSELBLATT, Boris. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 54, Cambridge University Press, 1995. 824 p.
27. KIM, Jinill, KIM, Sunghyun. Two Pitfalls of Linearization Methods. *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 39, issue 4, 2007, pp. 995–1001.

28. KIM, Jinill, KIM, Sunghyun, SCHAUMBURG, Ernst, SIMS, Christopher A. Calculating and Using Second-Order Accurate Solutions of Discrete Time Dynamic Equilibrium Models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 32, issue 11, November 2008, pp. 3397–3414.
29. KING, Robert G., WATSON, Mark W. System Reduction and Solution Algorithms for Singular Linear Difference Systems under Rational Expectations. *Computational Economics*, No. 20, issue 1–2, October 2002, pp. 57–86.
30. KLEIN, Paul. Using the Generalized Schur form to Solve a Multivariate Linear Rational Expectations Model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, No. 24, 2000, pp. 1405–1423.
31. KOLLMANN, Robert. Monetary Policy Rules in the Open Economy: Effects on Welfare and Business Cycles. *Journal of Monetary Economics*, vol. 49, issue 5, July 2002, pp. 989–1015.
32. KOLLMANN, Robert. Welfare Effects of a Monetary Union: the Role of Trade Openness. *Journal of the European Economic Association*, vol. 2, No. 2/3, April–May 2004, pp. 289–301.
33. LIPTON, David, POTERBA, James, SACHS, Jeffrey, SUMMERS, Lawrence. Multiple Shooting in Rational Expectations Models. *Econometrica*, vol. 50, No 5, September 1982, pp. 1329–1333.
34. LJUNGQVIST, Lars, SARGENT, Thomas J. *Recursive Macroeconomic Theory* (2nd edition). The MIT Press, 2004. 1116 p.
35. LOMBARDO, Giovanni. *On Approximating DSGE Models by Series Expansions*. European Central Bank Working Paper Series, No. 1264, November 2010. 31 p.
36. SCHMITT-GROHÉ, Stephanie, URIBE, Martín. Solving Dynamic General Equilibrium Models Using as Second-Order Approximation to the Policy Function. *Journal of Economic Dynamics and Control*, No. 28, 2004, pp. 755–775.
37. SIMS, Christopher A. Solving Linear Rational Expectations Models. *Computational Economics*, No. 20, issue 1–2, October 2001, pp. 1–20.
38. SWANSON, Eric, ANDERSON, Gary S., LEVIN, Andrew. *Higher-Order Perturbation Solutions to Dynamic, Discrete-Time Rational Expectations Models*. Federal Reserve Bank of San Francisco, July 2005. 30 p.
39. UHLIG, Harald. A Toolkit for Analysing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily. In: *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*. Ed. by R. Marimon and A. Scott. Oxford, UK : Oxford University Press, 1999, pp. 30–61.
40. WOODFORD, Michael. *Interest and Prices*. Princeton University Press, 2003. 808 p.