LATVIJAS BANKA
EIROSISTĒMA

ISBN 978-9984-888-42-2

VIKTORS AJEVSKIS

PĒTĪJUMS
1 / 2014

DSGE MODEĻU DAĻĒJI GLOBĀLI ATRISINĀJUMI: PERTURBĀCIJAS AP DETERMINISTISKU TRAJEKTORIJU

SATURS

KOPSAVILKUMS

Šis pētījums piedāvā metodi dinamisko stohastisko vispārējā līdzsvara (*Dynamic Stohastic General Equilibrium;* DSGE) modeļu daļēji globālu atrisinājumu konstruēšanai, balstoties uz perturbāciju metodi. Tā galvenais mērķis ir paplašināt atrisinājumu uz maza parametra pakāpju rindu, ar ko nosaka tautsaimniecības nenoteiktības līmeni, ap deterministiska modeļa, t.i., tāda, kurā izzūd šoku svārstīgums, atrisinājumu. Ja līdzsvara stāvokļa mainīgo deterministiskā trajektorija ir globāla, tādi ir arī iegūtie stohastiskā modeļa atrisinājumi; savukārt šie atrisinājumi attiecībā uz mēroga parametru ir lokāli. Pieņemot, ka deterministiskā trajektorija jau ir zināma, rindas izvirzījuma augstākās kārtas locekļus iegūst rekursīvi, atrisinot lineāros racionālo gaidu modeļus ar laikā mainīgiem parametriem. Šajā pētījumā izstrādāta metode, kas šāda veida modeļu atrisinājumā balstās uz atpakaļvērstu rekursiju.

Atslēgvārdi: DSGE, perturbāciju metode, racionālo gaidu modelis ar laikā mainīgiem parametriem, aktīvu cenas noteikšanas modelis

JEL kodi: C61, C62, C63, D50, D58

Pētījumā izteiktie secinājumi atspoguļo autora – Latvijas Bankas Monetārās politikas pārvaldes darbinieka – viedokli, un autors uzņemas atbildību par iespējamām pieļautajām neprecizitātēm.

NETEHNISKS KOPSAVILKUMS

Pēckrīzes seku likvidēšanas periodā DSGE modelēšana, kas balstās uz perturbāciju paņēmienu, tika plaši pārbaudīta. Lieli un ilgstoši šoki un uzkrāta nesabalansētība var būtiski attālināt tautsaimniecību no tās stabila līdzsvara stāvokļa, kur veikt perturbācijas ap stabila līdzsvara stāvokli nav pareizi. Arī sākotnējos apstākļos, piemēram, pārejas posmā, tautsaimniecība var būt tālu no stabila līdzsvara stāvokļa. Tāpēc atjaunojusies interese par globālajām nelineārajām metodēm. Pretēji perturbāciju metodēm globālās metodes, piemēram, aplēšu, stohastiskās simulācijas u.c. metodes, ļauj iegūt lielu apgabalu atrisinājumus. Taču globālās metodes apgrūtina tas, ka līdz ar stabila stāvokļa dimensionalitāti strauji aug aprēķinu veikšanas izmaksas. Šī parādība jeb t.s. dimensionalitātes lāsts ierobežo aplēšu metožu izmantošanu pat vidēja lieluma modeļos.

Šajā pētījumā sniegta alternatīva pieeja konvencionālajām globālajām metodēm, un to zināmā mērā var uzskatīt par perturbāciju ap stabilu līdzsvara stāvokli vispārinājumu, bet tā ir globāla. Piedāvātie atrisinājumi sniegti kā maza σ parametra pakāpju rinda, kas nosaka tautsaimniecības nenoteiktību. Nulles kārtas tuvinājums atbilst deterministiska modeļa atrisinājumam, jo izzūd šoku svārstīgums. Deterministisko modeļu globālus atrisinājumus iespējams iegūt samērā ātri ar efektīvām skaitliskām metodēm un lietojot attīstītas programmatūras, piemēram, *Dynare* un *Troll*, kurās iestrādāti attiecīgie algoritmi.

Pieņemot, ka deterministiskais atrisinājums jau zināms, iegūst augstākas kārtas tuvinātas sistēmas, kuras ir atkarīgas tikai no zemāko kārtu skaita un tāpēc var tikt atrisinātas rekursīvi, un kuru lineārās homogēnās daļas ir atkarīgas no deterministiskā atrisinājuma. Tādējādi katru sistēmu var attēlot kā racionālo gaidu modeli ar laikā mainīgiem parametriem. Šajā pētījumā piedāvāta metode, kā iegūt šāda veida modeļu atrisinājumu.

Ja σ parametrs ir pietiekami mazs, iegūtie atrisinājumi ir tuvi deterministiskam atrisinājumam. Vienlaikus vienmēr, kad deterministiskais atrisinājums līdzsvara mainīgajiem ir globāls, tāds pats ir arī stohastiskās problēmas tuvinātais atrisinājums. Tāpēc aplūkotā pieeja tiks definēta kā daļēji globāla, bet perturbāciju metodes, kas balstītas uz rindas izvirzījumiem ap stabila līdzsvara stāvokli, tiks uzskatītas par lokālām. Atšķirībā no atrisinājumiem, ko iegūst ar lokālajām perturbācijas metodēm, atrisinājumi, kurus iegūst ar daļēji globālo metodi, no precīzā atrisinājuma manto t.s. globālās īpašības, piemēram, monotonitāti un konveksitāti.

Šo metodi izmanto K. Bernsaida *(C. Burnside)* (6) aktīvu cenas noteikšanas modelī. Tā kā modelim ir slēgta veida atrisinājums, tuvināta atrisinājuma precizitāti var pārbaudīt, to salīdzinot ar precīzo atrisinājumu. Daļēji globālas metodes otrās kārtas atrisinājuma precizitāti salīdzina ar lokālo Teilora *(J. Taylor)* rindas otrās kārtas izvirzījumu (S. Šmita-Groe *(S. Schmitt-Grohé)* un M. Uribe *(M. Uribe)* (24)). Daļēji globālās metodes precizitāte ir ārkārtīgi augsta un manto globālās īpašības no precīzā atrisinājuma.

Dž. Lombardo *(G. Lombardo)* (22) izmanto rindas izvirzījumu σ pakāpēs, lai rekursīvi iegūtu tuvinātus precīzos atrisinājumus. J. Borovička *(J. Borovička)* un L. P. Hansens *(L. P. Hansen)* (5) savukārt izmanto Dž. Lombardo paņēmienu, lai noteiktu šoka atvērtības un šoka cenas elastības, kas ir atbilstošie aktīvu cenas noteikšanas locekļi, impulsu reakcijas funkcijās. Šādai pieejai ir dažas līdzīgas iezīmes ar šajā pētījumā aplūkoto metodi. Taču abos darbos izvirzījumi lietoti tikai ap deterministisku stabilu līdzsvara stāvokli, tāpēc iegūtais atrisinājums joprojām ir lokāls. Dž. Lombardo metodi var uzskatīt par šajā pētījumā piedāvātās metodes īpašu gadījumu, t.i., par deterministisko atrisinājumu, ap kuru izvirzījums tiek lietots tikai stabila līdzsvara stāvokļa gadījumā.

IEVADS

Nelineāru DSGE modeļu atrisināšanā visplašāk lieto perturbāciju metodes, jo tās var izmantot modeļos ar vidēju un lielu mainīgo skaitu, iegūstot atrisinājumu saprātīgā aprēķinu izpildes laikā. Makroekonomikā lietotās perturbācijas izmanto, lai ar līdzsvara stāvokļa mainīgo pakāpēm un ekonomiskās nenoteiktības mēroga parametru ap deterministisku stabila līdzsvara stāvokli paplašinātu precīzo atrisinājumu. Tie atrisinājumi, kas balstās uz Teilora rindas izvirzījumiem, paši par sevi jau ir lokāli, t.i., zināma deterministiska stabila līdzsvara stāvokļa apkārtnē (iespējams mazā apgabalā) tie ir precīzi. Neesot šajā apkārtnē, piemēram, pietiekami lielu šoku gadījumā (vai arī sākotnējos, no līdzsvara stāvokļa ļoti attālinātos apstākļos), tuvinātajam atrisinājumam var būt eksplozīva dinamika pat tad, ja sākotnējā sistēma ar šādiem šokiem (sākotnējiem nosacījumiem) ir joprojām stabila (Č. Kims *(J. Kim)*, S. Kims *(S. Kim)*, E. Šaumburgs (*E. Schaumburg)* u.c. (21) un V. J. den Hāns *(W. J. Den Haan)* un J. de Vinds *(J. De Wind)* (8)).

Šajā pētījumā piedāvāta DSGE modeļu globālo atrisinājumu iegūšanas metode, kas balstās uz perturbāciju paņēmienu. Piedāvātie atrisinājumi sniegti kā maza σ parametra pakāpju rinda, kas nosaka šoku kovariances matricu. Nulles kārtas tuvinātais atrisinājums atbilst deterministiska modeļa atrisinājumam, jo visi šoki izzūd, ja $\sigma = 0$. Deterministisko modeļu globālos atrisinājumus var iegūt samērā ātri ar efektīvām skaitliskām metodēm[1] pat modeļiem ar lielu mainīgo skaitu (P. Holindžers *(P. Hollinger)* (15)). Tāpēc metodes nākamie posmi tiek īstenoti, pieņemot, ka ar esošajiem sākotnējiem nosacījumiem deterministiskā modeļa atrisinājums ir zināms.

Augstākas kārtas sistēmas ir atkarīgas tikai no zemāko kārtu daudzuma, tāpēc tās var atrisināt rekursīvi. Šo sistēmu homogēnā daļa ir vienāda visām kārtām un atkarīga no deterministiskā atrisinājuma. Tādējādi katru sistēmu var atveidot kā racionālo gaidu modeli ar laikā mainīgiem parametriem. Ja racionālo gaidu modelim ir konstanti parametri, var izdalīt stabilu vienādojumu bloku un to turpmāk risināt. Tas nav iespējams attiecībā uz modeļiem ar laikā mainīgiem parametriem. Šajā pētījumā piedāvāta metode, ar kuru var iegūt atrisinājumu šādiem modeļiem. Metodes izmantošana sākas ar ierobežota horizonta atrisinājumu ar atpakaļvērstu rekursiju. Pēc tam tiek pierādīts, ka ar noteiktiem nosacījumiem, ja horizonts tiecas uz bezgalību, ierobežota horizonta risinājumi tuvojas robežas atrisinājumam, kas visiem pozitīviem laika mainīgajiem ir slēgtas formas.

Ja σ parametrs ir pietiekami mazs, iegūtie atrisinājumi būs tuvu deterministiskam atrisinājumam. Vienlaikus vienmēr, kad deterministisks atrisinājums attiecībā uz stāvokļa mainīgajiem ir globāls, tāds pats ir arī stohastiskās problēmas tuvinātais atrisinājums. Tāpēc šajā pētījumā šāda pieeja tiek saukta par daļēji globālu, bet perturbāciju metodes, kas balstās uz izvirzījumiem rindā ap līdzsvara stāvokli, tiks uzskatītas par lokālām. Atšķirībā no atrisinājumiem, kas iegūti ar lokālām perturbāciju metodēm, atrisinājumi, kurus iegūst ar daļēji globālo metodi, no precīzā

[1] Algoritms, kas iekļauts plaši izmantotās programmatūrās, piemēram, *Dynare* (un mazāk pieejamajā *Troll*), nodrošina apkopotas plašas laika periodu sistēmas vienādojumu atrisinājumu un balstās uz Ņūtona metodi, kas papildināta ar neblīvu (ar maz nulles vērtībām) matricu paņēmienu (S. Adžemjans *(S. Adjemian)*, H. Bastani *(H. Bastani)*, M. Žilārs *(M. Juillard)* u.c. (2)).

atrisinājuma manto globālās īpašības, piemēram, monotonitāti un konveksitāti, un tāpēc pēc būtības nevar eksplodēt.

Pētījumā šo metodi lieto K. Bernsaida (6) aktīvu cenas noteikšanas modelim. Tā kā modelim ir slēgta veida atrisinājums, tuvināta atrisinājuma precizitāti var pārbaudīt, to salīdzinot ar precīzo atrisinājumu. Daļēji globālās metodes otrās kārtas atrisinājuma precizitāti salīdzina ar lokālo Teilora rindas otrās kārtas izvirzījumu (A. Šmita-Groe un M. Uribe (24)). Daļēji globālās metodes precizitāte ir ārkārtīgi augsta, un no precīzā atrisinājuma tā manto globālās īpašības.

Šis pētījums papildina arvien plašāko literatūras klāstu par perturbāciju metodes izmantošanu DSGE modeļu atrisināšanā. Perturbāciju metodi ekonomikā attīstījuši K. L. Džads *(K. L. Judd)* (18), Dž. Gaspars *(J. Gaspar)* un K. L. Džads (11), K. L. Džads un S. Guu *(S. Guu)* (19). H. Cjiņzs *(H. Jin)* un K. L. Džads (17) izstrādājuši teorētisku pamatojumu perturbāciju metožu izmantošanai DSGE modelēšanā. Izmantojot implicētās funkcijas teorēmu, pētnieki pierāda, ka perturbētu racionālo gaidu atrisinājums ilgstoši ir atkarīgs no kāda parametra, un tāpēc, šim parametram tiecoties uz nulli, tas tiecas uz deterministisko atrisinājumu.

Vairākums publicēto pētījumu veltīti aproksimācijai ap stabilu līdzsvara stāvokli (F. Kolārs *(F. Collard)* un M. Žilārs *(M. Juillard)* (7), A. Šmita-Groe un M. Uribe (24), Č. Kims, S. Kims, E. Šaumbergs u.c. (21), P. Goms *(P. Gomme)* un P. Kleins *(P. Klein)* (13)). Dž. Lombardo (22) izmanto rindas izvirzījumu σ parametra kārtās, lai rekursīvi atrastu precīzā atrisinājuma tuvinājumus. J. Borovička un L. P. Hansens (5) izmanto šo Dž. Lombardo pieeju, lai konstruētu šoka pakļautības un šoka izmaksu elastības, kas ir atbilstošie aktīvu cenas noteikšanas locekļi impulsu reakcijas funkcijās. Šo pētnieku paņēmienam ir zināma līdzība ar šajā pētījumā aplūkoto metodi. Tomēr abos darbos (22; 5) izmantots izvirzījums tikai ap deterministisku stabila līdzsvara stāvokli, tāpēc iegūtais atrisinājums joprojām ir lokāls. Viņu pieejai ir dažas līdzīgas iezīmes ar šajā pētījumā izmantoto metodi. Taču abos darbos izvirzījumi lietoti tikai ap deterministisku stabila līdzsvara stāvokli, tāpēc iegūtais atrisinājums joprojām ir lokāls. Dž. Lombardo metodi var uzskatīt par šajā pētījumā aplūkotās metodes īpašu gadījumu, t.i., deterministisku atrisinājumu, ap kuru izvirzījums tiek lietots tikai stabila līdzsvara stāvokļa gadījumā.

K. L. Džads (18) skaidro, kā lietojamas perturbācijas ap visu zināmo atrisinājumu, kas ne vienmēr ir stabils līdzsvara stāvoklis. Viņš aplūko vienkāršus ilgstoša un diskrēta laika stohastiskos izaugsmes modeļus dinamiskā programmēšanas ietvarā. Šajā pētījumā izstrādāta precīza pieeja DSGE modeļu atrisinājumu konstruēšanai vispārējā veidā, izmantojot perturbāciju metodi ap globālu deterministisku trajektoriju.

Pētījuma 1. nodaļa sniedz modeļa uzbūves izklāstu. Rindu izvirzījumu ekspozīcija DSGE modeļiem detalizēti aprakstīta 2. nodaļā. Savukārt 3. nodaļā modelis pārveidots analīzei piemērotā veidolā. Racionālo gaidu modeļu atrisinājumu metode laikā mainīgiem parametriem aplūkota 4. nodaļā. Šī metode izmantota aktīvu cenu noteikšanas modelī, un tās precizitāte salīdzināta ar 5. nodaļā aprakstīto lokālo perturbāciju metodi. Nobeigumā sniegti secinājumi.

1. MODELIS

DSGE modeļiem parasti ir šāda forma:

$$E_t f(y_{t+1}, y_t, x_{t+1}, x_t, z_{t+1}, z_t) = 0 \quad (1),$$

$$z_{t+1} = \Lambda z_t + \sigma\varepsilon_{t+1}, \quad \varepsilon_{t+1} : N(0,\Omega) \quad (2)$$

kur E_t apzīmē nosacītu gaidu operatoru, x_t ir endogēno stāvokļa mainīgo $n_x \times 1$ vektors laikā *t*, y_t ir endogēno mainīgo, kas nav stāvokļa mainīgie, $n_y \times 1$ vektors laikā *t*, z_t ir eksogēno stāvokļa mainīgo $n_z \times 1$ vektors laikā *t*, ε_t ir vektors ar atbilstošām inovācijām, $\sigma\Omega$ ir $n_z \times n_z$ inovāciju kovariances matrica, f ir $\mathrm{R}^{n_y} \times \mathrm{R}^{n_y} \times \mathrm{R}^{n_x} \times \mathrm{R}^{n_x} \times \mathrm{R}^{n_z} \times \mathrm{R}^{n_z}$ attēlojums uz $\mathrm{R}^{n_y} \times \mathrm{R}^{n_x}$, un tas tiek uzskatīts par pietiekami gludu, $\sigma\,(\sigma > 0)$ ir traucējumu locekļu ε_t skalārs parametrs. Tiek pieņemts, ka visi ε_t jauktie momenti ir ierobežoti. Visu matricas Λ īpašvērtību modulis ir mazāks par 1.

[1] un [2] vienādojumu atrisina šādi:

$$y_t = h(x_t, z_t) \quad [3],$$

kur h ir $\mathrm{R}^{n_x} \times \mathrm{R}^{n_z}$ attēlojums uz R^{n_y}. Problēmu atrisināšanai vēl var formulēt šādi: dotajam sākotnējam nosacījumam (x_0, z_0) atrast sākotnējo nosacījumu y_0 tādā veidā, lai atrisinājums (x_t, y_t) [1] un [2] vienādojumam laikā $t > 0$ ir slēgtas formas.

2. RINDAS IZVIRZĪJUMI

Šajā nodaļā [1] un [2] modeļa tuvināta atrisinājuma iegūšanai tiks ievērota perturbāciju metode (sk., piemēram, M. Holmss *(M. H. Holmes)* (16)). Maza σ gadījumā izmanto pieņēmumu, ka atrisinājumam ir šāda īpaša izvirzījumu forma:

$$y_t = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n y^{(n)}(x_t, z_t) \qquad [4],$$

$$x_t = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n x_t^{(n)} \qquad [5],$$

kur $y^{(n)}(x_t, z_t)$ un $x_t^{(n)}$, $n = 0,1,2,\ldots,$ attiecīgi ir [3] vienādojuma atrisinājuma un mainīgā x_t n-kārtas tuvinājums. Arī eksogēno procesu z_t var viegli attēlot kā σ izvirzījumu:

$$z_t = z_t^{(0)} + \sigma z_t^{(1)} \qquad [6].$$

Ievietojot [6] vienādojumu [2] vienādojumā, iegūst:

$$z_{t+1} = z_{t+1}^{(0)} + \sigma z_{t+1}^{(1)} = \Lambda(z_t^{(0)} + \sigma z_t^{(1)}) + \sigma \varepsilon_{t+1}.$$

Apkopojot σ līdzīgu pakāpju locekļus un pielīdzinot tos nullei, iegūst šādas izteiksmes:

$$z_{t+1}^{(0)} = \Lambda z_t^{(0)} \qquad [7],$$

$$z_{t+1}^{(1)} = \Lambda z_t^{(1)} + \varepsilon_{t+1} \qquad [8].$$

Tā kā izvirzījumiem [6] vienādojumā jābūt spēkā visiem σ sākumlaikā $t = 0$, sākotnējie nosacījumi ir šādi:

$$z_0^{(0)} = z_0 \qquad \text{un } z_0^{(1)} = 0 \qquad [9].$$

Jāņem vērā, ka funkciju $y^{(i)}$ argumenti ir σ pakāpju izvirzījumi. Ievietojot [5] un [6] izteiksmes izvirzījumus [4] sistēmā, iegūst:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma^i y^{(i)} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sigma^j x_t^{(j)}, z_t^{(0)} + \sigma z_t^{(1)} \right) \qquad [10].$$

Paplašinot y_t maza σ gadījumā un apkopojot līdzīgu pakāpju locekļus, iegūst:

$$y_t = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n y^{*(n)}(x_t^{(0)}, x_t^{(1)}, \ldots, x_t^{(n)}, z_t^{(0)}, z_t^{(1)}) \qquad [11],$$

kur

$$y^{*(0)}(x_t^{(0)}, z_t^{(0)}) = y^{(0)}(x_t^{(0)}, z_t^{(0)}),$$

$$y^{*(1)}(x_t^{(0)}, x_t^{(1)}, z_t^{(0)}, z_t^{(1)}) = y^{(1)}(x_t^{(0)}, z_t^{(0)}) + y_{1,0;t}^{(0)} x_t^{(1)} + y_{0,1;t}^{(0)} z_t^{(1)}$$

un

$$y^{*(n)}(x_t^{(0)}, x_t^{(1)}, ..., x_t^{(n)}, z_t^{(0)}, z_t^{(1)}) = y^{(n)}(x_t^{(0)}, z_t^{(0)}) + y_{1,0;t}^{(0)} x_t^{(n)} + p_{n,t} \qquad [12],$$

kur attēlojumam $p_{n,t} = p_n(x_t^{(0)}, x_t^{(1)}, \ldots, x_t^{(n-1)}, z_t^{(0)}, z_t^{(1)})$ ir arguments ar augšrakstu, kas mazāks par n, un to definē šādi:

$$p_{n,t} = \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!} \sum_{j=0}^{n-l} \sum_{k=1}^{n-j-l} \frac{1}{k!} y_{k,l;t}^{(j)} \left[\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n-j-l} \binom{n-j-l}{i_1; i_2; ...; i_k} x_t^{(i_1)}, x_t^{(i_2)}, ..., x_t^{(i_k)}, \left(z_t^{(1)}\right)^l \right],$$

kur $y_{k,l;t}^{(j)}$ ir jauktais daļējais atvasinājums no $y^{(j)}$ k un l kārtas attiecībā uz x_t un z_t attiecīgi punktā $(x_t^{(0)}, z_t^{(0)})$, un $\left(z_t^{(1)}\right)^l = (z_t^{(1)}, \ldots, z_t^{(1)})$ (l reizes). Tādējādi $y_{k,l;t}^{(j)}$ ir $(k+l)$ multilineārs attēlojums (sk., piemēram, R. Eibrehemu *(R. Abraham)*, Dž. E. Mārsdenu *(J. E. Marsden)* un T. Raciu *(T. Ratiu)* (1; 55. lpp.)), kas atkarīgs no $(x_t^{(0)}, z_t^{(0)})$ (un līdz ar to arī no t). [12] izteiksmi ievietojot [11] vienādojumā, to pārraksta šādi:

$$y_t = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n \left[y^{(n)}(x_t^{(0)}, z_t^{(0)}) + y_{1,0;t}^{(0)} x_t^{(n)} + p_{n,t} \right] \qquad [13].$$

Pēc tam, [1] vienādojumā ievietojot [5], [6] un [13] vienādojumu, apkopojot locekļus ar σ vienādām pakāpēm un pielīdzinot to koeficientus nullei, var aprēķināt vairākus koeficientus.

σ^0 koeficients

$$f\left(y^{(0)}(x_{t+1}^{(0)}, z_{t+1}^{(0)}), y^{(0)}(x_t^{(0)}, z_t^{(0)}), x_{t+1}^{(0)}, x_t^{(0)}, z_{t+1}^{(0)}, z_t^{(0)}\right) = 0 \qquad [14].$$

Prasība, ka [5] un [6] izteiksmei jābūt spēkā attiecībā uz visām pieņemtajām mazajām σ vērtībām, nozīmē to, ka sākotnējie nosacījumi [14] izteiksmē ir šādi:

$$z_0^{(0)} = z_0 \text{ un } x_0^{(0)} = x_0 \qquad [15].$$

Galanosacījums ir stabils līdzsvara stāvoklis. [7] un [14] vienādojuma sistēma ir deterministisks modelis, jo tas atbilst [1] un [2] modelim, kur visi šoki izzūd. Deterministiskais [7] un [14] modelis ar sākotnējiem nosacījumiem [15] vienādojumam var tikt atrisināti globāli, izmantojot vairākus efektīvus algoritmus, piemēram, pagarinātās trajektorijas metodi (R. Fērs *(R. Fair)* un Dž. Teilors *(J. Taylor)* (9)) vai Ņūtona metodi (sk., piemēram, M. Žilārs *(M. Juillard)* (20)). Tā kā šā pētījuma galvenais objekts ir stohastiskie modeļi, turpmāk darbā pieņemts, ka deterministiska modeļa $(x_t^{(0)}, y^{(0)}(x_t^{(0)}, z_t^{(0)}))$ atrisinājums laikā $t > 0$ jau ir zināms.

σ^n **koeficients,** $n > 0$

$$\begin{aligned} &E_t\{f_{1,t+1} \cdot y_{t+1}^{(n)} + f_{2,t+1} \cdot y_t^{(n)} + \left[f_{1,t+1} \cdot y_{1,0;t+1}^{(0)} + f_{3,t+1}\right]x_{t+1}^{(n)} \\ &+\left[f_{2,t+1} \cdot y_{1,0;t}^{(0)} + f_{4,t+1}\right]x_t^{(n)} + \eta_{t+1}^{(n)}\} = 0 \end{aligned} \qquad [16],$$

kur $y_t^{(n)} = y^{(n)}(x_t^{(0)}, z_t^{(0)})$. Prasība, ka [5] izteiksmei jābūt spēkā attiecībā uz visām pieņemtajām mazajām σ vērtībām, nozīmē to, ka [16] vienādojuma sākotnējais nosacījums ir šāds:

$$x_0^{(n)} = 0 \qquad [17].$$

Matricas

$$f_{i,t+1} = f_i\left(y^{(0)}(x_{t+1}^{(0)}, z_{t+1}^{(0)}), y^{(0)}(x_t^{(0)}, z_t^{(0)}), x_{t+1}^{(0)}, x_t^{(0)}, z_{t+1}^{(0)}, z_t^{(0)}\right), i = 1, \ldots, 6,$$

ir *f* attēlojuma Jakobi matricas attiecībā uz y_{t+1}, y_t, x_{t+1}, x_t, z_{t+1} un z_t punktā $\left(y^{(0)}(x_{t+1}^{(0)}, z_{t+1}^{(0)}), y^{(0)}(x_t^{(0)}, z_t^{(0)}), x_{t+1}^{(0)}, x_t^{(0)}, z_{t+1}^{(0)}, z_t^{(0)}\right)$.

$E_t\eta_t^{(n)}$ attēlo šādā formā:

$$E_t\eta_{t+1}^{(n)} = E_t\eta^{(n)}\left(x_{t+1}^{(0)}, x_t^{(0)}, \ldots, x_{t+1}^{(n-1)}, x_t^{(n-1)}, z_{t+1}^{(0)}, z_t^{(0)}, z_{t+1}^{(1)}, z_t^{(1)}\right),$$

kur $\eta^{(n)}$ ir tāds attēlojums, kura argumentu kopa ietver tikai lielumus ar kārtu, kas zemāka par n. Vektors $z_{t+1}^{(1)}$ iekļauts gaidās $E_t\eta_{t+1}^{(n)}$ n vai zemākas kārtas jauktu momentu formā. $f_{i,t+1}$ un $\eta_{t+1}^{(n)}$ apakšraksts $t + 1$ atspoguļo to atkarību no $t + 1$ locekļos $x_{t+1}^{(0)}$ un $z_{t+1}^{(0)}$.

Gaidas $E_t\eta_{t+1}^{(n)}$ ir ierobežotas gadījumā, ja visi $z_{t+1}^{(1)}$ jauktie momenti ir ierobežoti līdz kārtai *n*, un vektori

$$\left(y_{t+1}^{(0)}, y_t^{(0)}, x_{t+1}^{(0)}, x_t^{(0)}, \ldots, y_{t+1}^{(n-1)}, y_t^{(n-1)}, x_{t+1}^{(n-1)}, x_t^{(n-1)}, z_{t+1}^{(0)}, z_t^{(0)}, z_{t+1}^{(1)}, z_t^{(1)}\right)$$

ir ierobežoti visos gadījumos, kad $t \geq 0$.

[16] vienādojums ar sākotnējo [17] nosacījumu ir lineārs racionālo gaidu modelis ar laikā mainīgiem koeficientiem. [16] un [17] problēmas atrisināšana ir līdzvērtīga slēgtas formas atrisinājuma $(x_t^{(n)}, y_t^{(n)})$ iegūšanai laikā $t > 0$, pieņemot, ka slēgtas formas atrisinājumi problēmām ar kārtām, kas zemākas par *n*, ir jau zināmi. Jāņem vērā, ka [16] vienādojuma homogēnā daļa visām $n > 0$ ir vienāda, bet atšķirība ir tikai nehomogēnajos locekļos $E_t\eta_{t+1}^{(n)}$. 4. nodaļā aplūkota šādu modeļu atrisinājuma iegūšanas metode un pierādīta metodes sniegto atrisinājumu konverģence uz precīzo atrisinājumu. Nākamajā nodaļā [16] vienādojums tiek pārveidots tā izmantošanai ērtākā formā.

3. MODEĻA PĀRVEIDOJUMS

Deterministisks stabila līdzsvara stāvoklis tiek izteikts kā vektori $(\bar{y}, \bar{x}, 0)$:

$$f(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}, \bar{x}, 0, 0) = 0 \qquad [18].$$

$f_{i,t+1}$ [16] vienādojumā var attēlot kā $f_{i,t+1} = f_i + \hat{f}_{i,t+1}$, $i = 1,\ldots,6$, kur $f_i = f_i(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}, \bar{x}, 0, 0)$ ir f attēlojuma Jakobi matricas attiecībā uz y_{t+1}, y_t, x_{t+1}, x_t, z_{t+1} un z_t stabilā līdzsvara stāvoklī un

$$\hat{f}_{i,t+1} = f_{i,t+1}(y_{t+1}^{(0)}, y_t^{(0)}, x_{t+1}^{(0)}, x_t^{(0)}, z_{t+1}^{(0)}, z_t^{(0)}) - f_i(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}, \bar{x}, 0, 0) \qquad [19].$$

Jāņem vērā arī tas, ka $\hat{f}_{i,t+1} \to 0$, ja $t \to \infty$, jo katram deterministiskam atrisinājumam jātiecas uz deterministisko stabila līdzsvara stāvokli, ja t tuvojas bezgalībai. Tāpēc $f_{i,t+1}$ var uzskatīt par f_i perturbāciju. Lai saīsinātu apzīmējumu, turpmāk gadījumos, kad nevar rasties pārpratumi, augšraksts (n) netiks lietots. [16] vienādojumu var pārrakstīt vektoru formā:

$$\Phi_{t+1} E_t \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \Lambda_{t+1} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + E_t \eta_{t+1} \qquad [20],$$

kur $\Phi_t = \left[f_3 + \hat{f}_{3,t}, f_1 + \hat{f}_{1,t} \right]$ un $\Lambda_t = \left[f_4 + \hat{f}_{4,t}, f_2 + \hat{f}_{2,t} \right]$. Pieņem, ka matricas Φ_t vienmēr ir apvēršamas, ja $t \geq 0$. Šāds pieņēmums būs spēkā, ja, piemēram, Jakobi matrica $[f_3, f_1]^{-1}$ stabila līdzsvara stāvoklī ir apvēršama[2] un locekļi $\hat{f}_{1,t}$ un $\hat{f}_{3,t}$ ir pietiekami mazi vienmēr, ja $t \geq 0$. Reizinot [20] vienādības kreiso pusi ar Φ_{t+1}^{-1}, iegūst:

$$E_t \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + M_{t+1} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \Phi_{t+1}^{-1} E_t \eta_{t+1} \qquad [21],$$

kur $L = [f_3, f_1]^{-1}[f_4, f_2]$ un

$$M_{t+1} = \left[f_3 + \hat{f}_{3,t+1}, f_1 + \hat{f}_{1,t+1} \right]^{-1} \left[f_4 + \hat{f}_{4,t+1}, f_2 + \hat{f}_{2,t+1} \right] - [f_3, f_1]^{-1}[f_4, f_2].$$

Jāņem vērā, ka $lim_{t\to\infty} M_t = 0$. Līdzīgi kā racionālo gaidu modeļus ar konstantiem parametriem, arī [21] sistēmu ir ērti pārveidot, izmantojot L spektrālo īpašību. Konkrētāk, matricu L pārveido bloka diagonālajā matricā, izmantojot bloka diagonālo Šura faktorizāciju[3]

---

[2] To pieņem, lai atvieglotu ekspozīciju. Ja $[f_3, f_1]$ ir singulāra matrica, turpmāk jāizmanto vispārināta Šura *(I. Schur)* dekompozīcija, kurai atvasinājumi saglabājas spēkā, bet kļūst sarežģītāki.

[3] Faktorizāciju veic ar *Matlab Control System Toolbox* bdschur funkciju.

$$L = ZPZ^{-1} \quad [22],$$

kur

$$P = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad [23],$$

kur A un B ir augšējā trijstūra kvazimatricas, kuru īpašvērtības ir attiecīgi lielākas vai mazākas par 1 (modulī), un Z ir apvēršama matrica[4]. Nestabilas apakštelpas dimensijai, t.i., $dim(B) = n_y$, tiek noteikts arī konvenciālais Blanšāra–Kāna (O. Ž. Blanšārs *(O. J. Blanchard)* un Č. M. Kāns *(Ch. M. Kahn)* (4)) nosacījums.

Pēc palīgmainīgo ieviešanas

$$[s_t, u_t]' = Z^{-1}[x_t, y_t]' \quad [24]$$

un [21] sistēmas kreisās puses reizināšanas ar Z^{-1} iegūst:

$$E_t s_{t+1} = As_t + Q_{11,t+1} s_t + Q_{12,t+1} u_t + \Psi_{1t+1} E_t \eta_{t+1} \quad [25],$$

$$E_t u_{t+1} = Bu_t + Q_{21,t+1} s_t + Q_{22,t+1} u_t + \Psi_{2t+1} E_t \eta_{t+1} \quad [26],$$

kur $[\Psi_{1,t+1}, \Psi_{2,t+1}] = Z\Phi_{t+1}^{-1}$ un

$$\begin{bmatrix} Q_{11,t+1} & Q_{12,t+1} \\ Q_{21,t+1} & Q_{22,t+1} \end{bmatrix} = ZM_{t+1}Z^{-1} \quad [27].$$

[25] un [26] vienādojuma sistēma ir lineārs racionālo gaidu modelis ar laikā mainīgiem parametriem, tāpēc nevar izmantot paņēmienus, kas der modeļiem ar konstantiem parametriem (O. Ž. Blanšārs un Č. M. Kāns (4), G. Andersons *(G. Anderson)* un Dž. Mūrs *(G. Moore)* (3), K. A. Simss *(C. A. Sims)* (25), H. Ūligs *(H. Uhlig)* (26) u.c.). 4.2. sadaļā aplūkota metode šāda veida modeļu atrisinājuma iegūšanai.

[4] Var izmantot arī vienkāršo vispārināto Šura faktorizāciju, tomēr tas palielinās atvasinājumu sarežģītību.

4. RACIONĀLO GAIDU MODEĻA AR LAIKĀ MAINĪGIEM PARAMETRIEM ATRISINĀJUMS

4.1. Apzīmējumi

Šajā sadaļā ieviests apzīmējums, kas būs nepieciešams turpmāk. Ar $|\cdot|$ apzīmē Eiklīda normu R^n. Reālās matricas *D* inducēto normu definē kā

$$\|D\| = \sup_{|s|=1} |Ds|.$$

Z matricu [22] vienādojumā var izvēlēties tā, lai

$$\|A\| < \alpha + \gamma < 1 \text{ un } \|B^{-1}\| < \beta + \gamma < 1 \qquad [28],$$

kur α un β ir attiecīgi *A* un B^{-1} matricu lielāko īpašvērtību moduļi un γ ir pēc izvēles mazs. Tas izriet no tādiem pašiem argumentiem kā F. Hartmaņa *(Ph. Hartmann)* darbā (14; IV 9. §), kur to veica Džordana *(C. Jordan)* matricas dekompozīcijai. Jāņem vērā, ka pietiekami maza γ gadījumā $\|B^{-1}\| < 1$. Raksta, ka:

$$B_t = B + Q_{22,t} \text{ un } A_t = A + Q_{11,t} \qquad [29].$$

Saskaņā ar definīciju raksta, ka:

$$a = \sup_{t=0,1,\dots} \|A_t\|, \quad b = \sup_{t=0,1,\dots} \|B_t^{-1}\| \qquad [30],$$

$$c = \sup_{t=0,1,\dots} \|Q_{12,t}\|, \quad d = \sup_{t=0,1,\dots} \|Q_{21,t}\| \qquad [31].$$

Tālāk pieņem, ka visas matricas B_t, $t = 0,1,\dots,$ ir apvēršamas. a, b, c un d ir atkarīgi no sākuma nosacījumiem $(x_0^{(0)}, z_0^{(0)})$. No A_t, A, B_t, B, $Q_{12,t}$ un $Q_{21,t}$ definīcijām un nosacījuma $lim_{t\to\infty}(x_t^{(0)}, z_t^{(0)}) = (\bar{x}, 0)$ izriet, ka:

$$\lim_{t\to\infty} c(x_t^{(0)}, z_t^{(0)}) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} d(x_t^{(0)}, z_t^{(0)}) = 0, \qquad [32].$$

$$\lim_{t\to\infty} a(x_t^{(0)}, z_t^{(0)}) = \|A\| < 1, \quad \lim_{t\to\infty} b(x_t^{(0)}, z_t^{(0)}) = \|B^{-1}\| < 1.$$

Tas nozīmē, ka var būt izvēlēti mazi c un d un

$$a < 1 \text{ un } b < 1 \qquad [33],$$

izvēloties $(x_0^{(0)}, z_0^{(0)})$ pietiekami tuvu stabila līdzsvara stāvoklim.

4.2. Pārveidotās [25] un [26] sistēmas atrisinājums

Ievērojot [29] apzīmējumu, [25] un [26] vienādojumu var pārrakstīt šādā formā:

$$E_t s_{t+1} = A_{t+1} s_t + Q_{12,t+1} u_t + \Psi_{1,t+1} E_t \eta_{t+1} \quad [34],$$

$$E_t u_{t+1} = B_{t+1} u_t + Q_{21,t+1} s_t + \Psi_{2,t+1} E_t \eta_{t+1} \quad [35].$$

Šajā sadaļā tiks iegūts slēgtas formas atrisinājums [34] un [35] vienādojuma sistēmai laikā $t \geq 0$ ar izvēlētu sākuma nosacījumu $s_0 \in \mathrm{R}^{n_x}$ un noteikts, kādos apstākļos (ar kādiem nosacījumiem) šāds atrisinājums ir iespējams. Tāpēc vispirms tiek atrisināts ierobežota horizonta modelis ar fiksētu beigu nosacījumu, izmantojot atpakaļvērstu rekursiju. Pēc tam tiek pierādīta iegūtā ierobežota horizonta atrisinājuma konverģence uz ierobežotu bezgalīga horizonta modeli, beigu laikam T tiecoties uz bezgalību.

Nosaka horizontu $T > 0$. Izmantojot B_{T+1} apvēršamību un atpakaļejoši atrisinot [35] vienādojumu, var iegūt u_T kā lineāru s_T funkciju, beigu nosacījumu $E_T u_{T+1}$ un "eksogēnu" locekli $\Psi_{2,T+1} E_T \eta_{T+1}$:

$$u_T = -B_{T+1}^{-1} Q_{21,T+1} s_T - B_{T+1}^{-1} \Psi_{2,T+1} E_T \eta_{T+1} + B_{T+1}^{-1} E_T u_{T+1}.$$

Turpinot veikt atpakaļejošu rekursiju, var iegūt ierobežota horizonta atrisinājumus katram $t = 0,1,2,\ldots,T$. Lai to veiktu, jādefinē šādas atkārtotas matricu rindas:

$$K_{T,T-i-1} = L_{T+1,T-i}^{-1} \left(Q_{21,T-i} + K_{T,T-i} A_{T-i} \right), \quad i = 0,1,\ldots,T, \quad [36],$$

kur

$$L_{T,T-i} = B_{T-i} + K_{T,T-i} Q_{12,T-i} \quad [37]$$

ar beigu nosacījumu $K_{T,T+1} = 0$. [36] un [37] vienādojumā pirmais apakšraksts T definē laika horizontu, bet otrais apakšraksts – visus laika periodus starp 0 un $T+1$. Ar $u_{T,T-i}$, $i = 0,1,\ldots,T$, apzīmē $(T-i)$ laika atrisinājumu, ko iegūst ar atpakaļejošu rekursiju, kas sākas laikā T.

4.1. teorēma

Pieņem, ka eksistē [36] un [37] izteiksmes matricu rinda; tādā gadījumā [34] un [35] sistēmas atrisinājumu var izteikt šādi:

$$u_{T,T-i} = -K_{T,T-i} s_{T-i} + g_{T,i} + \left(\prod_{k=1}^{i+1} L_{T,T-i+k}^{-1} \right) E_{T-i}\left(u_{T+1} \right) \quad [38],$$

kur $i = 0,1,\ldots,T$; un

$$g_{T,i} = -\sum_{j=1}^{i+1} \prod_{k=1}^{j} L_{T,T-i+k}^{-1} (\Psi_{2,T-i+j} + K_{T,T-i+j} \Psi_{1,T-i+j}) E_{T-i} \eta_{T-i+j}. \quad [39].$$

Pierādījums sniegts A pielikumā. [36] izteiksmes matricu rinda pastāv, ja visām matricām $L_{T,T-i}$, $i = 0,1,\ldots,T$, piemīt apvēršamība. Papildus nepieciešams kāds ierobežojuma nosacījums matricām $B_{T-i}^{-1} K_{T,T-i+1} Q_{12,T-i}$.

4.2. teorēma

Ja attiecībā uz a, b, c un d no [30] un [31] vienādojuma spēkā ir nevienādība

$$cd < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b} - a\right)^2 = \left(\frac{1-ab}{2b}\right)^2 \qquad [40],$$

tad

$$\left\|B_{T-i}^{-1}\right\| \cdot \left\|K_{T,T-i+1}\right\| \cdot \left\|Q_{12,T-i}\right\| < 1, \quad i = 0,1,2,\ldots T \qquad [41].$$

Pierādījums sniegts A pielikumā.

4.3. teorēma

Ja spēkā ir [41] nevienādība, matricām $L_{T,T-i}$, $i = 0,1,2.\ldots,T$ piemīt apvēršamība.

Pierādījums. No [37] vienādojuma un B_{T-i} apvēršamības izriet, ka:

$$L_{T,T-i} = B_{T-i}\left(I + B_{T-i}^{-1} K_{T,T-i} Q_{12,T-i}\right) \qquad [42].$$

Matricas $L_{T,T-i}$ ir apvērstas tikai tad, ja apvērstas ir matricas $\left(I + B_{T-i}^{-1} K_{T,T-i} Q_{12,T-i}\right)$. No normas īpašības un [41] izteiksmes iegūst:

$$\left\|B_{T-i}^{-1} K_{T,T-i+1} Q_{12,T-i}\right\| \le \left\|B_{T-i}^{-1}\right\| \cdot \left\|K_{T,T-i+1}\right\| \cdot \left\|Q_{12,T-i}\right\| < 1.$$

$\left(I + B_{T-i}^{-1} K_{T,T-i} Q_{12,T-i}\right)$ apvēršamība izriet no Dž. H. Goluba *(G. H. Golub)* un Č. F. van Loana *(Ch. F. Van Loan)* teorijas (12; 2.3.3. lemma).

$i = T$ no [38] vienādojuma aprēķina šādi:

$$u_{T,0} = -K_{T,0} s_0 + g_{T,T} + \left(\prod_{k=1}^{T+1} L_{T,k}^{-1}\right) E_0\left(u_{T+1}\right) [43].$$

Tas ir ierobežota horizonta atrisinājums [34] un [35] racionālo gaidu modelim ar laikā mainīgiem koeficientiem ar sākuma nosacījumu s_0. Atliek pierādīt, ka [43] formas atrisinājums $u_{T,0}$ konverģē uz noteiktu robežu, ja $T \to \infty$.

4.4. teorēma

Ja [40] nevienādība ir spēkā, $j = 0,1,2,\ldots$ robeža $\lim_{T\to\infty} K_{T,j} = K_{\infty,j}$ pastāv 4.1. sadaļā definētajā matricas telpā.

Pierādījums sniegts A pielikumā.

4.5. teorēma

Ja [41] nevienādība ir spēkā,

$$\lim_{T\to\infty}\prod_{k=1}^{T+1}L_{T,k}^{-1}=0 \qquad [44]$$

un

$$\lim_{T\to\infty} g_{T,T}=g_{\infty} \qquad [45],$$

kur g_{∞} ir kāds no R^{n_y} vektoriem.

Pierādījums. No [37] izteiksmes un 4.4. teorēmas izriet, ka:

$$\lim_{T\to\infty} L_{T,k}=B_k+K_{\infty,k}Q_{12,k}=L_{\infty,k}.$$

Tādā gadījumā [44] ierobežojumu var izteikt šādi:

$$\lim_{T\to\infty}\prod_{k=1}^{T+1}L_{T,k}^{-1}=\lim_{T\to\infty}\prod_{k=1}^{T+1}L_{\infty,k}^{-1} \qquad [46].$$

Tā kā $K_{\infty,k}$ ir ierobežots (izriet no A pielikumā sniegtās [76] formulas) un

$$\lim_{k\to\infty}Q_{12,k}=0, \text{ un } \lim_{k\to\infty}B_k^{-1}=B^{-1},$$

iegūst $lim_{k\to\infty}L_{\infty,k}^{-1}=B^{-1}$. Tāpēc, ja $\delta>0$ ir izvēlēts mazs, $N=N_{\delta}\in\mathrm{N}$, ņemot vērā, ka

$$\left\|L_{\infty,k}^{-1}\right\|\le\beta+\delta=\rho<1 \qquad [47]$$

attiecībā uz $k>N$, kur β ir moduļa lielākā īpašvērtība matricā B^{-1}. No tā, normas īpašības un [46] vienādības aprēķina, ka:

$$\lim_{T\to\infty}\left\|\prod_{k=1}^{T+1}L_{T,k}^{-1}\right\|\le\lim_{T\to\infty}\prod_{k=1}^{T+1}\left\|L_{\infty,k}^{-1}\right\|\le\lim_{T\to\infty}C_1\rho^{T-K}=0,$$

kur C_1 ir kāda no konstantēm. Tādējādi [44] izteiksme ir pierādīta.

Saskaņā ar [47] nevienādību [39] izteiksmes faktori eksponenciāli samazinās ar faktoru ρ, ja $j\to\infty$. No tā, locekļu $K_{T,k}$, $\Psi_{2,k}$, $\Psi_{1,k}$ un $E_0\eta_k$ ierobežotības, kā arī $T\in\mathrm{N}$ un $k=1,2,\ldots,T+1$, izriet, ka rinda

$$g_{T,T}=-\sum_{j=1}^{T+1}\prod_{k=1}^{j}L_{T,k}^{-1}(\Psi_{2,j}+K_{T,j}\Psi_{1,j})E_0\eta_j$$

konverģē uz kādu no g_{∞}, ja $T\to\infty$.

No 4.4. un 4.5. teorēmas var secināt, ka, ja T tiecas uz bezgalību, [43] vienādojumu var izteikt šādi:

$$u_0 = -K_{\infty,0} s_0 + g_\infty \qquad [48].$$

[48] formula ir unikāls slēgtas formas atrisinājums pārveidotam racionālo gaidu modelim ar laikā mainīgiem parametriem [34] un [35] sistēmā. Jāatgādina arī tas, ka 4.2.–4.5. teorēmu pierādījumi balstās uz [40] nevienādību, kas ir [34] un [35] sistēmas nestabilo un stabilo daļu spektrālās atšķirības nosacījums un zināmā mērā aizstāj Blanšāra–Kāna nosacījumu racionālo gaidu modelī ar laikā mainīgiem parametriem. No [30] un [33] vienādojuma izriet, ka [40] nevienādība ir vienmēr spēkā, ja sākotnējie nosacījumi $(x_t^{(0)}, z_t^{(0)})$ ir pietiekami tuvi stabilam līdzsvara stāvoklim. Tomēr pats par sevi [40] nosacījums nav lokāls.

4.3. Sākotnējo mainīgo $x_t^{(n)}$ un $y_t^{(n)}$ atjaunošana

Tā kā tiek risināta n-kārtas [16] un [17] vienādojuma problēma, turpmāk apzīmējumā apakšraksts (n) atkal tiek lietots. Lai atrastu slēgtas formas atrisinājumu sākotnējo mainīgo $x_t^{(n)}$ un $y_t^{(n)}$ izteiksmē, jāaprēķina $u_0^{(n)}$ un $s_0^{(n)}$ sākotnējās vērtības, kas atbilst vērtībām [21] problēmā, t.i., $x_0^{(n)} = 0$. No [24] un [48] vienādojuma var aprēķināt:

$$\begin{bmatrix} s_0^{(n)} \\ -K_{\infty,0}^{(n)} s_0^{(n)} + g_\infty^{(n)} \end{bmatrix} = Z^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ y_0^{(n)} \end{bmatrix},$$

kur Z^{-1} ir matrica, kas lietota bloka diagonālajā Šura faktorizācijā ([22] vienādojums) un kurai ir šāda bloka dekompozīcija:

$$Z^{-1} = \begin{bmatrix} Z^{11} & Z^{12} \\ Z^{21} & Z^{22} \end{bmatrix}.$$

Tādējādi:

$$s_0^{(n)} = Z^{12} y_0^{(n)} \qquad [49],$$

$$-K_{\infty,0}^{(n)} s_0^{(n)} + g_\infty^{(n)} = Z^{22} y_0^{(n)} \qquad [50].$$

Ievietojot [49] izteiksmi [50] izteiksmē un pieņemot, ka matrica $Z^{22} + K_{\infty,0}^{(n)} Z^{12}$ ir apvērsta, aprēķina:

$$y_0^{(n)} = (Z^{22} + K_{\infty,0}^{(n)} Z^{12})^{-1} g_\infty^{(n)} \qquad [51].$$

[51] vienādības kreisā puse atbilst $y^{(n)}(x_0, z_0)$ [4] vienādojumā. Tas, ka $y_0^{(n)}$ ir atkarīgs no (x_0, z_0), izriet no locekļiem $K_{\infty,0}^{(n)}$ un $g_\infty^{(n)}$. Tāpēc [51] formula nosaka risinājumu [16] oriģinālajam racionālo gaidu modelim ar laikā mainīgiem parametriem un sākotnējo nosacījumu, ka $x_0^{(n)} = 0$. Matrica $(Z^{22} + K_{\infty,0} Z^{12})$ ir

apvērsta, ja 1) matrica Z^{22} ir kvadrātveida un apvērsta un 2) matricas $K_{\infty,0}$ norma ir pietiekami maza. Pirmais nosacījums atbilst Blanšāra–Kāna (4) 1. teorēmai; vienlaikus otrais nosacījums var vienmēr iestāties, ja sākotnējie nosacījumi $(x_t^{(0)}, z_t^{(0)})$ ir pietiekami tuvi stabila līdzsvara stāvoklim, kas izriet no A pielikuma [75] un [76] formulas. Paši par sevi šie nosacījumi nav lokāli.

Atbilstoši pieņēmumam zemākas kārtas atrisinājumi jau ir aprēķināti, tāpēc kontrolfunkcijas tuvinājums ir šādā formā[5]:

$$y_t = \sum_{i=0}^{n} \sigma^i y^{(i)}(x_t, z_t) .$$

Ja uzdevums ir atrisināt [1] un [2] vienādojuma sistēmu (piemēram, iegūt impulsu reakcijas funkcijas), katrai kārtai *n*, zinot $y_0^{(n)}$ un izmantojot [49]–[51] sistēmas pārveidojumus, var atkal aprēķināt sākotnējos nosacījumus $(s_0^{(n)}, u_0^{(n)})$, atrisināt [34] un [35] vienādojumu ar šiem sākotnējiem nosacījumiem un, visbeidzot, aprēķināt [21] sistēmas atrisinājumu, izmantojot Z pārveidojumu. Tas nodrošina [21] izteiksmes atrisinājumu šādā formā:

$$x_t^{(n)} = Z_{11} s_t^{(n)} + Z_{12} u_t^{(n)},$$

$$y_t^{(n)} = Z_{21} s_t^{(n)} + Z_{22} u_t^{(n)},$$

kur Z_{ij}, $i = 1,2$, $j = 1,2$, ir bloku dekompozīcijas matricas *Z* bloki.

[5] Faktiski nav grūti pierādīt, ka vienīgais slēgtais atrisinājums ir $x_t^{(n)} \equiv 0$ un $y_t^{(n)} \equiv 0$, ja ε_t sadale visiem nepāra *n* ir simetriska. Tas 5. nodaļā tiks parādīts vienkāršam aktīvu cenas noteikšanas modelim, ja *i* = 1.

5. AKTĪVU CENAS NOTEIKŠANAS MODELIS

Šajā nodaļā aplūkotā metode izmantota nelineārā aktīvu cenas noteikšanas modelī, kuru izveidoja K. Bernsaids (6) un analizēja F. Kolārs un M. Žilārs (7). Reprezentatīvais aģents maksimizē ilguma derīguma funkciju:

$$\max\left(E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C_t^{\theta}}{\theta}\right),$$

kas atkarīga no

$$p_t e_{t+1} + C_t = p_t e_t + d_t e_t,$$

kur $\beta > 0$ ir subjektīvs diskonta faktors, $\theta < 1$ un $\theta \neq 0$, C_t apzīmē patēriņu, p_t ir aktīva vienas vienības cena laikā t, e_t ir viena aktīva vienību skaits perioda t sākumā un d_t ir dividendes par katru aktīvu periodā t. Dividenžu pieauguma tempa atspoguļojums ir AR(1) process:

$$\mathrm{x_t} = (1-\rho)\,\bar{\mathrm{x}} + \rho x_{t-1} + \sigma\varepsilon_{t+1} \quad [52],$$

kur $x_t = ln(d_t/d_{t-1})$ un $\varepsilon_{t+1} \sim NIID(0,1)$. Izmantojot pirmās kārtas nosacījumu un tirgus līdzsvaru, iegūst līdzsvara nosacījumu:

$$y_t = \beta E_t\left[\exp(\theta x_{t+1})(1+y_{t+1})\right] \quad [53],$$

kur $y_t = p_t/d_t$ ir cenas un dividenžu attiecība. Šim vienādojumam ir šādas formas precīzais atrisinājums (K. Bernsaids (6)):

$$y_t = \sum_{i=1}^{\infty} \beta^i \exp\left[a_i + b_i(x_t - \bar{x})\right] \quad [54],$$

kur

$$a_i = \theta\bar{x}i + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta\sigma}{1-\rho}\right)^2\left[i - \frac{2\rho(1-\rho^i)}{1-\rho} + \frac{\rho^2(1-\rho^{2i})}{1-\rho^2}\right] \quad [55]$$

un

$$b_i = \frac{\theta\rho(1-\rho^i)}{1-\rho}.$$

No [53] vienādojuma izriet, ka tautsaimniecības deterministiskais stabila līdzsvara stāvoklis ir šāds:

$$\bar{y} = \frac{\beta\exp(\theta\bar{x})}{1-\beta\exp(\theta\bar{x})}.$$

5.1. Atrisinājums

Turpmāk jāiegūst [52] un [53] sistēmas atrisinājums kā σ parametra pakāpju izvirzījums, izmantojot 2.–4. nodaļā aplūkoto otrās kārtas tuvinājuma metodi. Konkrēti nepieciešams iegūt atrisinājumu:

$$y_t = y^{(0)}(x_t) + \sigma y^{(1)}(x_t) + \sigma^2 y^{(2)}(x_t) \quad [56],$$

$$x_t = x_t^{(0)} + \sigma x_t^{(1)} \quad [57].$$

[57] vienādojumu ievietojot [52] izteiksmē un apkopojot locekļus ar σ^0 un σ^1 parametriem, iegūst [57] vienādojuma x_t izteiksmes:

$$x_{t+1}^{(0)} = (1-\rho)\,\bar{\mathrm{x}} + \rho x_t^{(0)} \quad [58],$$

$$x_{t+1}^{(1)} = \rho x_t^{(1)} + \varepsilon_{t+1} \quad [59].$$

Tā kā [57] izvirzījumam jābūt derīgam visiem σ parametriem sākumlaikā $t = 0$, sākotnējie nosacījumi ir šādi:

$$x_0^{(0)} = x_0 \text{ un } x_0^{(1)} = 0 \quad [60].$$

[53] līdzsvara nosacījuma izteiksmē ievietojot [56] un [57] izteiksmi, pēc tam apkopojot visus locekļus ar σ parametra līdzīgajām pakāpēm un σ līdzīgo pakāpju koeficientus pielīdzinot nullei, iegūst vairākus koeficientus (sk. B pielikumu).

σ^0 koeficients

$$y_t^{(0)} = \beta \exp(\theta x_{t+1}^{(0)})(1 + y_{t+1}^{(0)}) \quad [61],$$

$$x_{t+1}^{(0)} = \rho x_t^{(0)} \quad [62];$$

σ^1 koeficients

$$\begin{aligned} y_{1;t}^{(0)} x_t^{(1)} \quad &+ y_t^{(1)} = \\ &+ \exp(\theta x_{t+1}^{(0)}) \beta E_t \left[\theta x_{t+1}^{(1)} (1 + y_{t+1}^{(0)}) + y_{1;t+1}^{(0)} x_{t+1}^{(1)} + y_{t+1}^{(1)}\right] \end{aligned} \quad [63];$$

$$x_{t+1}^{(1)} = \rho x_t^{(1)} + \varepsilon_{t+1}$$

σ^2 koeficients

$$\begin{aligned} y_t^{(2)} &= -y_{1;t}^{1} x_t^{(1)} - \frac{1}{2} y_{2;t}^{(0)} \left(x_t^{(1)}\right)^2 \\ &+ \frac{1}{2}\beta\left[\theta^2\left(1 + y_{t+1}^{(0)}\right) + 2\theta y_{1;t+1}^{(0)} + y_{2,t+1}^{(0)}\right]\exp(\theta x_{t+1}^{(0)}) E_t \left(x_{t+1}^{(1)}\right)^2 \\ &+ \beta \exp(\theta x_{t+1}^{(0)}) E_t \left[y_{t+1}^{(1)} + x_{t+1}^{(1)}\left(y_{1;t+1}^{(1)} + \theta y_{t+1}^{(1)}\right) + E_t\left(y_{t+1}^{(2)}\right)\right] \end{aligned} \quad [64],$$

kur $y_{j;t}^{(i)}$, $i = 0,1$, $j = 1,2$, ir j kārtas $y^{(i)}$ atvasinājumi $x_t^{(0)}$ punktā. Vienkāršojot $y_t^{(i)}$ raksta $y^{(i)}(x_t^{(0)})$ vietā, $i = 0,1,2$.

[61] un [62] sistēma ir deterministisks modelis. Tā atrisinājumu var iegūt, ja izmanto $\sigma = 0$ [54] un [55] izteiksmē:

$$y_t^{(0)} = \sum_{i=1}^{\infty} \beta^i \exp\left\{\theta\left[\bar{x}i + \frac{\rho(1-\rho^i)}{1-\rho}(x_t - \bar{x})\right]\right\} \quad [65].$$

Pirmās kārtas tuvinājumam [63] formulu var pārrakstīt šādi:

$$\begin{aligned} y_{1;t}^{(0)} x_t^{(1)} + y_t^{(1)} &= \beta \exp(\theta x_{t+1}^{(0)}) \left[\theta(1 + y_{t+1}^{(0)}) + y_{1;t+1}^{(0)}\right] E_t x_{t+1}^{(1)} \\ &+ \beta \exp(\theta x_{t+1}^{(0)}) E_t y_{t+1}^{(1)} \end{aligned} \quad [66].$$

Pieņemot, ka $y_t^{(0)}$ un $x_t^{(0)}$ ir zināmi, ja $t \geq 0$, [66] un [59] vienādojums veido uz priekšu vērstu modeli. Ja $x_0^{(1)} = 0$, no [59] vienādojuma var aprēķināt, ka $E_0 x_t^{(1)} = 0$ laikā $t > 0$. Viegli pierādīt, ka [66] vienādojuma vienīgais slēgtas formas atrisinājums ir $y_t^{(1)} \equiv 0$, ja $t \geq 0$.

[64] vienādojums ir lineārs uz priekšu vērsts vienādojums ar laikā mainīgiem deterministiskiem koeficientiem. To var atrisināt ar atpakaļvērstu rekursiju, kas aplūkota 4. nodaļā. Ievērojot to, ka $x_t^{(1)}$ sākotnējā vērtība ir nulle, viegli pārbaudīt, ka [64] vienādojuma atrisinājums ir šāds:

$$\begin{aligned} y_t^{(2)} &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n \exp[\theta(x_{t+1}^{(0)} + x_{t+2}^{(0)} + \cdots + x_{t+n}^{(0)})] \cdot [\theta^2(1 + y_{t+n}^{(0)}) \\ &+ 2\theta y_{1;t+n}^{(0)}] \cdot E_t (x_{t+n}^{(1)})^2 \end{aligned} \quad [67].$$

$y_{1;t+n}^{(0)}$ var aprēķināt, diferencējot [54] formulu attiecībā uz x_t, un tā ir šāda:

$$y_{1;t}^{(0)} = \sum_{i=1}^{\infty} \beta^i \frac{\rho(1-\rho^i)}{1-\rho} \exp\left\{\theta\left[\bar{x}i + \frac{\rho(1-\rho^i)}{1-\rho}\left(x_t - \bar{x}\right)\right]\right\}.$$

No [59] specifikācijas un [60] formulas sākotnējiem nosacījumiem iegūst $x_{t+1}^{(1)}$ mainīgā vidējā izteiksmi:

$$x_{t+n}^{(1)} = \varepsilon_{t+n} + \rho\varepsilon_{t+n-1} + \ldots + \rho^{n-1}\varepsilon_{t+1}.$$

Tā kā inovāciju secība ε_t, $t > 0$ ir neatkarīga, aprēķina, ka:

$$\begin{aligned} E_t\left(x_{t+n}^{(1)}\right)^2 &= E_t\left(\varepsilon_{t+n} + \rho\varepsilon_{t+n-1} + \cdots + \rho^{n-1}\varepsilon_{t+1}\right)^2 \\ &= 1 + \rho^2 + \cdots + \rho^{2(n-1)} = \frac{1-\rho^{2n}}{1-\rho^2}. \end{aligned} \quad [68].$$

No [58] formulas iegūst:

$$x_{t+1}^{(0)} + x_{t+2}^{(0)} + \cdots + x_{t+n}^{(0)} = \bar{x} + \rho(x_t^{(0)} - \bar{x}) + \bar{x} + \rho^2 (x_t^{(0)} - \bar{x}) + \bar{x} + \rho^n (x_t^{(0)} - \bar{x}) = n\bar{x} + \frac{\rho(1-\rho^n)}{1-\rho}(x_t^{(0)} - \bar{x}) \quad [69].$$

Visbeidzot, [68] un [69] vienādojumu ievietojot [67] atrisinājumā, iegūst:

$$y_t^{(2)} = \frac{\theta^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n \frac{1-\rho^{2n}}{1-\rho^2}\exp\left\{\theta[n\bar{x} + \theta\frac{\rho(1-\rho^n)}{1-\rho}(x_t^{(0)} - \bar{x})]\right\}\left[\theta^2(1+y_{t+n}^{(0)}) + 2\theta y_{1;t+n}^{(0)}\right].$$

Kopsavilkumā var secināt, ka kontrolfunkcijas tuvinājums ir šāds:

$$y(x) = y_t^{(0)}(x) + \sigma^2 y_t^{(2)}(x).$$

Augstākas kārtas $y_t^{(i)}(x)$, $i > 2$ atrisinājumus var iegūt gandrīz tāpat kā $y_t^{(2)}(x)$ atrisinājumus. Turklāt viegli atspoguļot to, ka visu nepāra i vienīgais slēgtas formas atrisinājums ir $y_t^{(i)} \equiv 0$.

5.2. Precizitātes pārbaude

Šajā sadaļā salīdzināta aplūkotās metodes otrās kārtas precizitāte ar Teilora lokālās rindas otrās kārtas izvirzījumu precizitāti (S. Šmita-Groe un M. Uribe (24)). Aproksimācijas metožu precizitātes pārbaudē izmanto šādus trīs kritērijus:

$$E_{0,\infty} = 100 \cdot \max_i \left\{\left|\frac{y(x_i) - \tilde{y}(x_i)}{y(x_i)}\right|\right\},$$

$$E_{1,\infty} = 100 \cdot \max_i \left\{\left|\frac{\Delta y(x_i) - \Delta\tilde{y}(x_i)}{\Delta y(x_i)}\right|\right\},$$

$$E_{2,\infty} = 100 \cdot \max_i \left\{\left|\frac{\Delta^2 y(x_i) - \Delta^2\tilde{y}(x_i)}{\Delta^2 y(x_i)}\right|\right\},$$

kur $y(x_i)$ apzīmē slēgtas formas atrisinājumu, $\tilde{y}(x_i)$ ir precīzā atrisinājuma tuvinājums ar aplūkoto metodi, $\Delta y(x_i) = y(x_i) - y(x_i - \Delta x)$ un $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ ir attiecīgi y un x pirmās starpības, $\Delta^2 y(x_i)$ ir y otrā starpība, t.i., $\Delta^2 y(x_i) = \Delta y(x_i) - \Delta y(x_{i-1})$. Kritērijs $E_{0,\infty}$ ir pieļautā maksimālā relatīvā kļūda, izmantojot tuvinājumu, nevis precīzo atrisinājumu. Kritēriji $E_{1,\infty}$ un $E_{2,\infty}$ atspoguļo tuvinātas kontrolfunkcijas formas īpašību, t.i., slīpuma un konveksitātes, precizitāti, salīdzinot tuvinātas un slēgtas formas atrisinājumu pirmās un otrās maksimālās relatīvās starpības. Visi kritēriji novērtēti intervālā $x_i \in [\bar{x} - \Delta \cdot \sigma_x, \bar{x} + \Delta \cdot \sigma_x]$, kur σ_x ir process, x_t ir beznosacījuma svārstīgums un $\Delta = 5$. Parametrizācijā izmanto

F. Kolāra un M. Žilāra (7) pieeju, kurā parametrizācijas etalons izvēlēts tāds pats kā R. Mehra *(R. Mehra)* un E. K. Preskota *(E. C. Prescott)* darbā (23). Tāpēc noteikts dividenžu pieauguma vidējais temps kā $\bar{x} = 0.0179$, tā noturība ρ = –0.139 un inovāciju svārstīgums σ = 0.0348. θ parametrs noteikts -1.5, un β ir 0.95. Tiek pētītas derīguma funkcijas lielāka izliekuma, spēcīgāka svārstīguma un dividenžu pieauguma tempa stingrāka noturīguma ietekme precizitātes izteiksmē.

Tabula liecina, ka etalona parametrizācijas maksimālā relatīvā kļūda Teilora rindas izvirzījuma tuvinājumam ir trīs reizes lielākā nekā daļēji globālajai metodei; tomēr abu metožu kļūdas ir ļoti mazas (attiecīgi 0.06% un 0.02%). Dividenžu pieauguma tempa nosacītā svārstīguma kāpuma (līdz $\sigma = 0.1$) rezultātā rodas lielākas tuvinājuma kļūdas lokālajam Teilora rindas izvirzījumam un daļēji globālajai metodei (attiecīgi 2% un 1%). Ja palielina derīguma funkcijas izliekumu (līdz $\theta = -10$), Teilora rindas izvirzījuma tuvinājuma maksimālā relatīvā kļūda ir 8.4%, bet daļēji globālās metodes tuvinājuma maksimālā relatīvā kļūda – aptuveni divas reizes mazāka.

Tabula

Tuvinājumu atrisinājumu relatīvās kļūdas

(%)

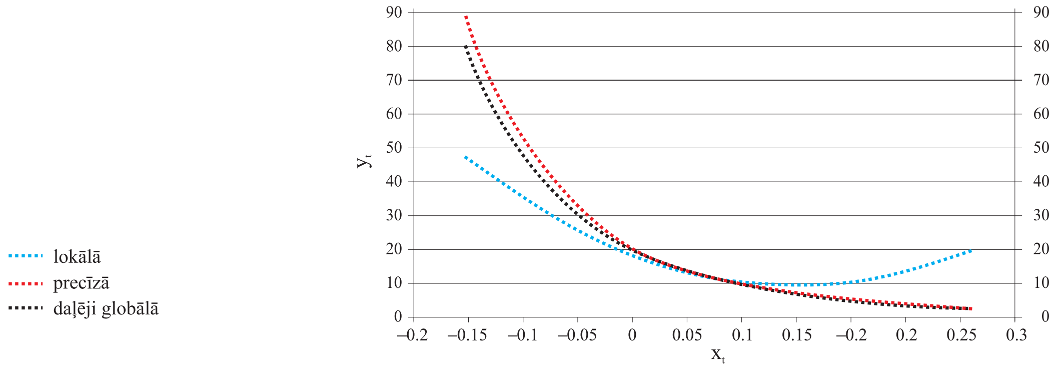
Kritērijs	$E_{0,\infty}$		$E_{1,\infty}$		$E_{2,\infty}$	
Modelis	SG[a]	P2[b]	SG	P2	SG	P2
Parametrizācija						
Etalons	0.02	0.06	0.02	1.47	0.02	4.53
$\theta = -10$	4.75	8.39	4.66	25.0	4.56	37.6
$\sigma = 0.1$	1.30	2.23	1.29	12.0	1.28	19.3
$\rho = 0.5, \sigma = 0.03$	0.26	1.56	0.28	8.72	0.30	26.6
$\rho = 0.5, \theta = -5$	10.3	27.8	11.0	69.4	11.6	71.3
$\rho = 0.9$	9.30	193	11.3	392	12.8	360

[a] Otrās kārtas daļēji globālā metode;
[b] otrās kārtas lokālā Teilora rindas perturbāciju metode (S. Šmita-Groe un M. Uribe (24)).

Daļēji globālās metodes precizitāte salīdzinājumā ar lokālo Teilora rindas izvirzījuma metodi būtiski uzlabojas, augot eksogēnā procesa noturībai. Ja parametri $\rho = 0.5$ un $\sigma = 0.03$, ar aplūkoto metodi var iegūt sešas reizes mazāku tuvinājuma maksimālo relatīvo kļūdu nekā ar lokālo Teilora rindas izvirzījumu metodi. Ja noturību paaugstina līdz $\rho = 0.9$, lokālajam Teilora rindas izvirzījuma tuvinājumam iegūst tuvinājuma maksimālo relatīvo kļūdu 193% un daļēji globālajai metodei – 9%. Rezultāts ir skaidrāk izteikts kritērijiem $E_{1,\infty}$ un $E_{2,\infty}$. Turklāt daļēji globālais tuvinājums jebkuram parametram nodrošina vismaz piecas reizes precīzāku atrisinājumu $E_{1,\infty}$ un deviņas reizes precīzākus $E_{2,\infty}$ rādītājus nekā lokālais Teilora rindas tuvinājums.

Attēls

Parametra $\rho = 0.9$ kontrolfunkciju salīdzinājums



Attēlā atspoguļotas kontrolfunkcijas augstas noturības gadījumam $\rho = 0.9$, liecinot, ka daļēji globālā metode daudz labāk nekā lokālā Teilora rindas izvirzījuma metode globāli fiksē precīzās kontrolfunkcijas veidu. Turklāt attēlā vērojama arī kāda cita nevēlama lokālās Teilora rindas izvirzījuma metodes īpašība. Ar šo metodi impulsu reakcijas funkcijām var piešķirt nepareizu zīmi. Patiesībā y_t stabila līdzsvara stāvokļa vērtība ir $\bar{y} = 12.3$. Pēc pozitīva šoka precīzā impulsu reakcijas funkcija ir negatīva, bet ar lokālo perturbāciju metodi iegūtā impulsu reakcijas funkcija – pozitīva, ja šoks ir pietiekami liels. Jāņem vērā, ka atrisinājumu, ko iegūst ar daļēji globālo metodi, pozitīva šoka gadījumā nevar atšķirt no precīzā atrisinājuma (sk. attēla apakšējo labo stūri).

SECINĀJUMI

Šajā pētījumā izstrādāta metode tuvinātu atrisinājumu konstruēšanai DSGE modeļiem, pamatojoties uz perturbācijām ap deterministisku trajektoriju. Iegūtie atrisinājumi vienmēr ir globāli stabila līdzsvara stāvoklī, kad tāds ir deterministiskais atrisinājums. Papildus izstrādāts paņēmiens, ar kuru rast atrisinājumu lineāru racionālo gaidu modeļiem ar deterministiskiem laikā mainīgiem parametriem. Visi iegūtie rezultāti attiecas uz vispārējas formas DSGE modeļiem, un tie ir ticami pierādīti.

Lokālo perturbāciju metožu izmantošanas priekšrocība ir to spēja saprātīgā aprēķinu laikā atrisināt modeļus ar vidēju un lielu mainīgo skaitu. Taču, tā kā šajās metodēs izmanto perturbācijas ap stabilu līdzsvara stāvokli, tās savā būtībā ir lokālas. Savukārt DSGE modelēšanā izmantotās globālās metodes, piemēram, aplēses un stohastiskās simulēšanas metodes, pakļautas t.s. dimensionalitātes lāstam, t.i., tās var piemērot tikai mazas dimensijas modeļiem. Ar pētījumā aplūkoto pieeju var atrisināt lielas dimensijas modeļus, jo tai ir dažas kopīgas vēlamas īpašības ar lokālo perturbāciju metodēm, t.i., nosacīto gaidu aprēķināšana var sniegt pozitīvu devumu aprēķinos.

Lai aprēķinātu nosacītās gaidas, izmantojot daļēji globālo metodi, nepieciešams zināt tikai momentu sadalījumu līdz pat tuvinājuma kārtai, bet minēto globālo metožu lietošana saistīta vai nu ar stohastiskām stimulācijām, vai ar kvadratūrām. Pirmās metodes ir laikietilpīgas, bet otrajās var izmantot tikai zemas kārtas integrāļus.

Šo pieeju var izmantot Markova pārslēgšanas DSGE modeļos tādā formā, kādu iesaka E. Fersters (A. Foerster), H. Rubio-Ramiress *(J. Rubio-Ramírez)*, D. Vagoners *(D. Waggoner)* u.c. (10), kur Markova pārslēgšanas parametru vektoru, kas ietekmētu stabila līdzsvara stāvokli, nosaka mazs faktors. Patiesībā maza noteicošā parametra un stohastisko locekļu augstākas kārtas momentu esamības apstākļos visi 2. nodaļas rezultāti (atvasinājumi) ir spēkā neatkarīgi no varbūtības sadales funkcijām šiem stohastiskajiem locekļiem.

PIELIKUMI

A pielikums
4. nodaļas teorēmu pierādījumi

4.1. TEORĒMAS PIERĀDĪJUMS. Pierādījumu iegūst ar indukciju pa i. Pieņem, ka $i = 0$. Laikam T no [35] izteiksmes iegūst:

$$E_T u_{T+1} = B_{T+1} u_T + Q_{21,T+1} s_T + \Psi_{2,T+1} E_T \eta_{T+1}.$$

Tā kā B_{T+1} ir apvērsts, aprēķina:

$$u_{T,T} = -K_{T,T} s_T - g_{T,0} + L^{-1}_{T,T,T} E_T u_{T+1},$$

kur $K_{T,T} = B^{-1}_{T+1} Q_{21,T+1}$, $g_{T,0} = -B^{-1}_{T+1} \Psi_{2,T+1} E_T \eta_{T+1}$ un $L^{-1}_{T,T+1} = B^{-1}_{T+1}$. No [36], [37] un [39] formulas izriet, ka inducētais pieņēmums ir pierādīts, ja $i = 0$. Pieņemot, ka [38] izteiksme ir spēkā, ja $i > 0$, tiks pierādīts, ka tā ir spēkā, arī ja $i + 1$. Lai to veiktu, [35] vienādojumu aplūko laikam $t = T - i - 1$. Tā kā matrica B_{T-i} ir apvērsta, iegūst:

$$u_{T,T-i-1} = -B^{-1}_{T-i} Q_{21,T-i} s_{T-i-1} - B^{-1}_{T-i} \Psi_{2,T-i} E_{T-i-1} \eta_{T-i} + B^{-1}_{T-i} E_{T-i-1} u_{T,T-i}.$$

Ievietojot [38] vienādojuma inducēto pieņēmumu $u_{T,T-i}$ vietā, iegūst:

$$\begin{aligned} u_{T,T-i-1} &= -B^{-1}_{T-i} Q_{21,T-i} s_{T-i-1} - B^{-1}_{T-i} \Psi_{2,T-i} E_{T-i-1} \eta_{T-i} \\ &+ B^{-1}_{T-i} E_{T-i-1} \left[-K_{T,T-i} s_{T-i} + g_{T,i} + \left(\prod_{k=1}^{i+1} L^{-1}_{T,T-i+k} \right) E_{T-i}\left(u_{T+1}\right) \right]. \end{aligned}$$

Ievietojot [34] vienādojumu $E_{T-i-1}(s_{T-i})$ vietā un piemērojot iterācijas gaidu likumu, iegūst:

$$\begin{aligned} u_{T,T-i-1} &= -B^{-1}_{T-i} Q_{21,T-i} s_{T-i-1} - B^{-1}_{T-i} \Psi_{2,T-i} E_{T-i-1} \eta_{T-i} + B^{-1}_{T-i} g_{T,i} \\ &+ B^{-1}_{T-i} \left(\prod_{k=1}^{i+1} L^{-1}_{T,T-i+k} \right) E_{T-i-1}\left(u_{T+1}\right) \\ &+ B^{-1}_{T-i} \left[-K_{T,T-i} \left(A_{T-i} s_{T-i-1} + Q_{12,T-i} u_{T,T-i-1} + \Psi_{1,T-i} E_{T-i-1} \eta_{T-i} \right) \right]. \end{aligned}$$

Apkopojot locekļus ar $u_{T,T-i-1}$, s_{T-i-1} un η_{T-i}, aprēķina:

$$\begin{aligned} \left(I + B^{-1}_{T-i} K_{T,T-i} Q_{12,T-i} \right) u_{T,T-i-1} &= -B^{-1}_{T-i} [(Q_{21,T-i} + K_{T,T-i} A_{T-i}) s_{T-i-1} \\ &+ (\Psi_{2,T-i} + K_{T,T-i} \Psi_{1,T-i}) E_{T-i-1} \eta_{T-i} + g_{T,i} + \left(\prod_{k=1}^{i+1} L^{-1}_{T,T-i+k} \right) E_{T-i-1}\left(u_{T+1}\right)]. \end{aligned}$$

Pieņem, ka matrica $Z_{T,T-i} = I + B^{-1}_{T-i} K_{T,T-i} Q_{12,T-i}$ ir apvērsta. Reizinot pēdējā vienādojuma kreiso pusi ar $Z^{-1}_{T,T-i}$, iegūst:

$$\begin{aligned} u_{T,T-i-1} &= -Z_{T,T-i}^{-1} B_{T-i}^{-1} [(Q_{21,T-i} + K_{T,T-i} A_{T-i}) s_{T-i-1} \\ &+ (\Psi_{2,T-i} + K_{T,T-i} \Psi_{1,T-i}) E_{T-i-1} \eta_{T-i} + g_{T,i} \\ &+ \left(\prod_{k=1}^{i+1} L_{T,T-i+k}^{-1} \right) E_{T-i-1}(u_{T+1})]. \end{aligned}$$

Jāņem vērā, ka $L_{T,T-i} = B_{T-i} Z_{T,T-i}$; izmantojot [36] vienādojuma $K_{T,T-i-1}$ definīciju, redzams, ka:

$$\begin{aligned} u_{T,T-i-1} &= -K_{T,T-i-1} s_{T-i-1} \\ &- L_{T,T-i}^{-1} \left(\Psi_{2,T-i} + K_{T,T-i} \Psi_{1,T-i} \right) E_{T-i-1} \eta_{T-i} \\ &+ L_{T,T-i}^{-1} g_{T,i} + L_{T,T-i}^{-1} \left(\prod_{k=1}^{i+1} L_{T,T-i+k}^{-1} \right) E_{T-i-1}(u_{T+1}) \end{aligned} \quad [70].$$

Izmantojot $g_{T,i}$ un $L_{T-i,T-i+j}$ definīcijas (attiecīgi [37] un [39] vienādojums), var secināt, ka:

$$g_{T,i+1} = -L_{T,T-i}^{-1} \left(\Psi_{2,T-i} + K_{T,T-i} \Psi_{1,T-i} \right) E_{T-i-1} \eta_{T-i} + L_{T,T-i}^{-1} g_{T,i} \quad [71].$$

No [70] un [71] vienādojuma izriet, ka:

$$u_{T,T-i-1} = -K_{T,T-i-1} s_{T-i-1} + g_{T,i+1} + \left(\prod_{k=1}^{i+2} L_{T,T-i-1+k}^{-1} \right) E_{T-i-1}(u_{T+1}).$$

Tādējādi teorēma ir pierādīta.

4.2. TEORĒMAS PIERĀDĪJUMS. Darbības sāk, pārrakstot [36] vienādojumu šādi:

$$\left(B_{T-i} + K_{T,T-i} Q_{12,T-i} \right) K_{T,T-(i+1)} = \left(Q_{21,T-i} + K_{T,T-i} A_{T-i} \right).$$

Pārkārtojot locekļus, iegūst:

$$\begin{aligned} K_{T,T-(i+1)} &= B_{T-i}^{-1} \cdot \left(Q_{21,T-i} + K_{T,T-i} A_{T-i} \right) \\ &- B_{T-i}^{-1} K_{T,T-i} Q_{12,T-i} K_{T,T-(i+1)} \end{aligned} \quad [72].$$

Izmantojot normas un normu īpašības, iegūst:

$$\left\| K_{T,T-(i+1)} \right\| \le \left\| B_{T-i}^{-1} \right\| \cdot \left\| Q_{21,T-i} \right\| + \left\| B_{T-i}^{-1} \right\| \cdot \left\| K_{T,T-i} \right\| \cdot \left\| A_{T-i} \right\| + \left\| B_{T-i}^{-1} \right\| \cdot \left\| K_{T,T-i} \right\| \cdot \left\| Q_{12,T-i} \right\| \cdot \left\| K_{T,T-(i+1)} \right\|.$$

Pārkārtojot locekļus, iegūst:

$$\left\| K_{T,T-(i+1)} \right\| \le \frac{\left\| B_{T-i}^{-1} \right\| \cdot \left\| Q_{21,T-i} \right\| + \left\| B_{T-i}^{-1} \right\| \cdot \left\| K_{T,T-i} \right\| \cdot \left\| A_{T-i} \right\|}{1 - \left\| B_{T-i}^{-1} \right\| \cdot \left\| K_{T,T-i} \right\| \cdot \left\| Q_{12,T-i} \right\|} \quad [73].$$

[73] nevienlīdzība ir starpības nevienlīdzība attiecībā uz $\left\|K_{T,T-i}\right\|$, $i=0,1,\ldots,T$, un tai ir laikā mainīgi koeficienti $\left\|A_{T-i}\right\|$, $\left\|B_{T-i}^{-1}\right\|$, $\left\|Q_{12,T-i}\right\|$ un $\left\|Q_{21,T-i}\right\|$. [73] nevienādībā pieņem, ka:

$$1-\left\|B_{T-i}^{-1}\right\|\cdot\left\|K_{T,T-i}\right\|\cdot\left\|Q_{12,T-i}\right\|\neq 0 .$$

Tas acīmredzami ir patiesi, ja $\left\|K_{T,T-i}\right\|=0$. To var atainot, ja sākotnējais nosacījums $\left\|K_{T,T+1}\right\|=0$, $\left(1-\left\|B_{T-i}^{-1}\right\|\cdot\left\|K_{T,T-i}\right\|\cdot\left\|Q_{12,T-i}\right\|\right)>0$, $i=1,2,\ldots,T$. Aplūko starpības vienādojumu

$$s_{i+1}=\frac{bd+bas_i}{\left(1-bcs_i\right)} \qquad [74].$$

8.1. lemma

Ja spēkā [40] nevienādība, [74] starpības vienādojumam ir divi fiksēti punkti:

$$s_1^*=\frac{2bd}{1-ba+\sqrt{(1-ba)^2-4b^2cd}} \qquad [75],$$

$$s_2^*=\frac{1-ba+\sqrt{(1-ba)^2-4b^2cd}}{2bc},$$

kur s_1^* ir stabils fiksēts punkts, bet s_2^* – nestabils fiksēts punkts. Turklāt, ja sākotnējais nosacījums ir $s_0=0$, $s_i, i=1,2,\ldots$, atrisinājums ir pieaugoša virkne, kas konverģē uz s_1^*.

Lemmu var pierādīt ar tiešo aprēķinu.

[31] un[30] izteiksmes vērtības a, b, c un d attiecīgi majorizē $\left\|A_{T-i}\right\|$, $\left\|B_{T-i}^{-1}\right\|$, $\left\|Q_{12,T-i}\right\|$ un $\left\|Q_{21,T-i}\right\|$. Ja [71] vienādību un [74] nevienādību aplūko kā sākumvērtības problēmas ar sākotnējiem nosacījumiem $\left\|K_{T,T+1}\right\|=0$ un $s_0=0$, to atrisinājumi noteikti apmierina nevienādību $\left\|K_{T,T-i}\right\|\leq s_{i+1}$, $i=1,2,\ldots,T$. Tādējādi $\left\|K_{T,T-i}\right\|$ tiek majorizēts ar s_i. Pēdējā nevienādība un 8.1. lemma ļauj secināt, ka:

$$\left\|K_{T,T-i}\right\|\leq s_1^*, \quad i=0,1,2,\ldots,T, \quad T\in\mathrm{N} \qquad [76].$$

No [75], [76] un [31] izteiksmes izriet, ka:

$$\left\|B_{T-i}^{-1}\right\|\cdot\left\|K_{T,T-i}\right\|\cdot\left\|Q_{12,T-i}\right\|\leq\frac{2b^2dc}{1-ba+\sqrt{(1-ba)^2-4b^2cd}} \qquad [77].$$

[40] nevienādībā redzams, ka $2b^2dc < (1-ab)^2/2$. Šo nevienādību ievieto [77] nevienādībā un iegūst:

$$\begin{aligned} \left\|B_{T-i}^{-1}\right\| \cdot \left\|K_{T,T-i}\right\| \cdot \left\|Q_{12,T-i}\right\| &\le \frac{(1-ba)^2}{2(1-ba+\sqrt{(1-ba)^2-4b^2cd})} \\ &< \frac{(1-ba)^2}{2(1-ba)} = \frac{1-ba}{2} < 1 \end{aligned} \qquad [78],$$

kur pēdējā nevienādība izriet no [33] izteiksmes. Tādējādi 2. teorēma ir pierādīta.

4.3. TEORĒMAS PIERĀDĪJUMS. Teorēmas apgalvojums ir precīzs, ja konstantes M un r ir atbilstoši $0 < r < 1$ un $T \in \mathrm{N}$

$$\left\|K_{T,j} - K_{T+1,j}\right\| \le Mr^{T+1}, \quad j = 0,1,2,\ldots \quad [79].$$

$K_{T,j}$ ($K_{T+1,j}$) ir atrisinājums [36] matricas starpības vienādojumam ar sākotnējo nosacījumu $K_{T,T+1} = 0$ ($K_{T+1,T+2} = 0$), ja $i = T - j$ ($i = T + 1 - j$). Atņemot $K_{T,T-(i+1)}$ [72] izteiksmē no attiecīgās $K_{T+1,T-(i+1)}$, iegūst:

$$\begin{aligned} &K_{T,T-(i+1)} - K_{T+1,T-(i+1)} = B_{T-i}^{-1}(K_{T,T-i)} - K_{T+1,T-i})A_{T-i} \\ &- B_{T-i}^{-1}K_{T,T-i)}Q_{12,T-i}K_{T,T-(i+1)} + B_{T-i}^{-1}K_{T+1,T-i}Q_{12,T-i}K_{T+1,T-(i+1)}. \end{aligned}$$

Pieskaitot un atņemot $B_{T-i}^{-1} \cdot K_{T,T-i} \cdot Q_{12,T-i} \cdot K_{T+1,T-(i+1)}$ izteiksmes labajā pusē, iegūst:

$$\begin{aligned} &K_{T,T-(i+1)} - K_{T+1,T-(i+1)} = B_{T-i}^{-1}(K_{T,T-i)} - K_{T+1,T-i})A_{T-i} \\ &- B_{T-i}^{-1} \cdot K_{T,T-i} \cdot Q_{12,T-i}(K_{T,T-(i+1)} - K_{T+1,T-(i+1)}) \\ &- B_{T-i}^{-1}(K_{T,T-i} - K_{T+1,T-i})Q_{12,T-i} \cdot K_{T+1,T-(i+1)}. \end{aligned}$$

Pārkārtojot locekļus, iegūst:

$$\begin{aligned} &(I + B_{T-i}^{-1}K_{T,T-i}Q_{12,T-i})(K_{T,T-(i+1)} - K_{T+1,T-(i+1)}) \\ &= B_{T-i}^{-1}(K_{T,T-i} - K_{T+1,T-i})A_{T-i} \\ &- B_{T-i}^{-1}(K_{T,T-i} - K_{T+1,T-i})Q_{12,T-i}K_{T+1,T-(i+1)}. \end{aligned}$$

No 4.3. teorēmas var secināt, ka matrica

$$Z_{T,T-i} = (I + B_{T-i}^{-1}K_{T,T-i}Q_{12,T-i})$$

ir apvērsta, un, ar to reizinot pēdējā vienādojuma kreiso pusi, iegūst:

$$\begin{aligned} &K_{T,T-(i+1)} - K_{T+1,T-(i+1)} = Z_{T,T-i}^{-1}(B_{T-i}^{-1}(K_{T,T-i} - K_{T+1,T-i})A_{T-i} \\ &- B_{T-i}^{-1}(K_{T,T-i)} - K_{T+1,T-i})Q_{12,T-i}K_{T+1,T-(i+1)}). \end{aligned}$$

Piemērojot normas, izmantojot normu īpašības un trijstūra nevienādību, izsaka:

$$\begin{aligned}\left\|K_{T,T-(i+1)}-K_{T+1,T-(i+1)}\right\| &\le \left\|Z_{T,T-i}^{-1}\right\|\cdot\left(\left\|B_{T-i}^{-1}\right\|\cdot\left\|K_{T,T-i}-K_{T+1,T-i}\right\|\cdot\left\|A_{T-i}\right\|\right.\\ &\left.+\left\|B_{T-i}^{-1}\right\|\cdot\left\|K_{T,T-i)}-K_{T+1,T-i}\right\|\cdot\left\|Q_{12,T-i}\right\|\cdot\left\|K_{T+1,T-(i+1)}\right\|\right)\end{aligned} \qquad [80].$$

No [30] un [78] izteiksmes iegūst:

$$\begin{aligned}\left\|K_{T,T-(i+1)}-K_{T+1,T-(i+1)}\right\| &\le \left(ab+\frac{1-ba}{2}\right)\left\|Z_{T,T-i}^{-1}\right\|\cdot\left\|K_{T,T-i}-K_{T+1,T-i}\right\|\\ &=\frac{1+ba}{2}\left\|Z_{T,T-i}^{-1}\right\|\cdot\left\|K_{T,T-i}-K_{T+1,T-i}\right\|\end{aligned} \qquad [81].$$

No normas īpašības un balstoties uz Dž. H. Golubu un Č. F. van Loanu (12; 2.3.3. lemma), iegūst aplēsi:

$$\left\|Z_{T,T-i}^{-1}\right\| = \left\|(I+B_{T-i}^{-1}K_{T,T-i}Q_{12,T-i})^{-1}\right\| \le \frac{1}{1-\left\|B_{T-i}^{-1}K_{T,T-i}Q_{12,T-i}\right\|} \le \frac{1}{1-\left\|B_{T-i}^{-1}\right\|\cdot\left\|K_{T,T-i}\right\|\cdot\left\|Q_{12,T-i}\right\|}$$

Izmantojot [78] nevienādību, nosaka, ka:

$$\left\|Z_{T,T-i}^{-1}\right\| =< \frac{1}{1-\frac{1-ba}{2}} = \frac{2}{1+ba}.$$

Ievietojot pēdējo nevienādību [81] formulā, iegūst:

$$\left\|K_{T,T-(i+1)}-K_{T+1,T-(i+1)}\right\| < \left\|K_{T,T-i}-K_{T+1,T-i}\right\| \qquad [82].$$

Secīgi izmantojot [85] vienādojuma $i=-1,0,1,\ldots,T-1$ gadījumā un ņemot vērā, ka $K_{T,T+1}=0$ un $K_{T+1,T+1}=B_{T+2}^{-1}Q_{21,T+2}$, iegūst:

$$\begin{aligned}&\left\|K_{T,j}-K_{T+1,j}\right\| < \left\|K_{T,T+1}-K_{T+1,T+1}\right\| = \left\|B_{T+2}^{-1}Q_{21,T+2}\right\|\\ &\le \left\|B_{T+2}^{-1}\right\|\cdot\left\|Q_{21,T+2}\right\| \le b\left\|Q_{21,T+2}\right\|, \quad j=0,1,2,\ldots\end{aligned} \qquad [83].$$

Jāatceras, ka $Q_{21,T}$ balstās uz [14] deterministiskās problēmas atrisinājumu, t.i., $Q_{21,T}=Q_{21}\left(x_{T+1}^{(0)},x_T^{(0)},z_{T+1}^{(0)},z_T^{(0)}\right)$. No F. Hartmaņa darba ((14), 5.1. sekas) un Q_{21} diferencētspējas attiecībā uz līdzsvara stāvokļa mainīgajiem izriet, ka:

$$\left\|Q_{21,T}\right\| \le C(\alpha+\theta)^T \qquad [84],$$

kur α ir [23] izteiksmes matricas A lielākais īpašvērtības modulis, C ir kāda no konstantēm un θ – izvēlēts mazs pozitīvs skaitlis. Faktiski $\alpha+\theta$ nosaka deterministiskā atrisinājuma konverģences ātrumu uz stabilu līdzsvara stāvokli. Ievietojot [84] formulu [85] vienādojumā, var secināt, ka:

$$\left\| K_{T,j} - K_{T+1,j} \right\| < bC(\alpha + \theta)^{T+2}, \quad j = 0,1,2,\ldots \qquad [85].$$

Nosakot, ka $M = bC(\alpha + \theta)$ un $r = \alpha + \theta$, beidzot tiek iegūta [79] izteiksme. Tādējādi šī teorēma ir pierādīta.

B pielikums
Bernsaida modeļa rindas izvirzījums

Ievietojot [56] un [57] formulu [53] vienādojumā, iegūst:

$$\begin{aligned} & y^{(0)}\left(x_t^{(0)} + \sigma x_t^{(1)}\right) + \sigma y^{(1)}\left(x_t^{(0)} + \sigma x_t^{(1)}\right) + \sigma^2 y^{(2)}\left(x_t^{(0)} + \sigma x_t^{(1)}\right) + \cdots \\ & = \beta E_t \{\exp\left[\theta\left(x_{t+1}^{(0)} + \sigma x_{t+1}^{(1)}\right)\right] \cdot [1 + y^{(0)}\left(x_{t+1}^{(0)} + \sigma x_{t+1}^{(1)}\right) + \sigma y^{(1)}\left(x_t^{(0)} + \sigma x_t^{(1)}\right) \\ & + \sigma^2 y^{(2)}\left(x_{t+1}^{(0)} + \sigma x_{t+1}^{(1)}\right) + \cdots]\}. \end{aligned}$$

Mazai σ vērtībai paplašinot y_t līdz otrajai kārtai, iegūst:

$$\begin{aligned} & y_t^{(0)} + \sigma y_{1,t}^{(0)} x_t^{(1)} + \frac{1}{2}\sigma^2 y_{2,t}^{(0)}\left(x_t^{(1)}\right)^2 + \sigma y^{(1)} x_t^{(0)} + \sigma^2 y_{1,t}^{(1)} x_t^{(1)} + \sigma^2 y_t^{(2)} + \cdots \\ & = \beta E_t \exp(\theta x_{t+1}^{(0)})\left[1 + \sigma\theta x_{t+1}^{(1)} + \frac{1}{2}\left(\sigma\theta x_{t+1}^{(1)}\right)^2 + \cdots\right][1 + y_{t+1}^{(0)} + \sigma y_{1,t+1}^{(0)} x_{t+1}^{(1)} \\ & + \sigma^2 \frac{1}{2} y_{2,t+1}^{(0)}\left(x_{t+1}^{(1)}\right)^2 + \sigma y_{t+1}^{(1)} + \sigma^2 y_{1,t+1}^{(1)} x_{t+1}^{(1)} + \sigma^2 y_{t+1}^{(2)} + \cdots]. \end{aligned}$$

Apkopojot pēdējā vienādojuma locekļus ar vienādām σ pakāpēm, iegūst:

$$\begin{aligned} & y_t^{(0)} + \sigma\left[(y_{1,t}^{(0)} x_t^{(1)} + y^{(1)} x_t^{(0)}\right] + \sigma^2\left[y^{(2)} + y_{2,t}^{(1)} x_t^{(1)} + \frac{1}{2} y_{2,t}^{(0)}\left(x_t^{(1)}\right)^2\right] + \cdots \\ & = \beta \exp\left(\theta x_{t+1}^{(0)}\right) E_t \{(1 + y_{t+1}^{(0)}) + \sigma\left[\theta x_{t+1}^{(1)}(1 + y_{t+1}^{(0)}) + y_{1,t+1}^{(0)} x_{t+1}^{(1)} + y_{t+1}^{(1)}\right] \\ & + \sigma^2[\frac{1}{2}(\theta x_{t+1}^{(1)})^2(1 + y_{t+1}^{(0)}) + y_{t+1}^{(2)} + y_{t+1}^{(1)} x_{t+1}^{(1)} + y_{1,t+1}^{(1)} x_{t+1}^{(1)} + \frac{1}{2} y_{2,t+1}^{(0)}\left(x_{t+1}^{(1)}\right)^2 \\ & + \theta y_{1,t+1}^{(0)}\left(x_{t+1}^{(1)}\right)^2 + \theta x_{t+1}^{(1)} y_{t+1}^{(1)}] + \cdots\}. \end{aligned}$$

LITERATŪRA

1. ABRAHAM, Ralph, MARSDEN, Jerrold E., RATIU, Tudor. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications* (2nd ed.). Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York-Tokyo, 2001. 643 p.

2. ADJEMIAN, Stéphane, BASTANI, Houtan, JUILLARD, Michel, KARAMÉ, Frédéric, MIHOUBI, Ferhat, PERENDIA, George, PFEIFER, Johannes, RATTO, Marco, VILLEMOT, Sébastien. *Dynare: Reference Manual, Version 4*. Dynare Working Papers, No. 1, CEPREMAP, April 2011. 100 p.

3. ANDERSON, Gary, MOORE, George. A Linear Algebraic Procedure for Solving Linear Perfect Foresight Models. *Economics Letters*, vol. 17, issue 3, 1985, pp. 247–252.

4. BLANCHARD, Olivier Jean, KAHN, Charles M. The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations. *Econometrica*, vol. 48, No. 5, July 1980, pp. 1305–1311.

5. BOROVIČKA, Jaroslav, HANSEN, Lars Peter. *Examining Macroeconomic Models through the Lens of Asset Pricing*. Federal Reserve Bank of Chicago Working Paper, 2012. 70 p.

6. BURNSIDE, Craig. Solving Asset Pricing Models with Gaussian Shocks. *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 22, issue 3, March 1998, pp. 329–340.

7. COLLARD, Fabrice, JUILLARD, Michel. Accuracy of Stochastic Perturbation Methods: The Case of Asset Pricing Models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 25, issue 6–7, June 2001, pp. 979–999.

8. DEN HAAN, Wouter J., DE WIND, Joris. Nonlinear and Stable Perturbation-Based Approximations. *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 36, issue 10, October 2012, pp. 1477–1497.

9. FAIR, Ray, TAYLOR, John. Solution and Maximum Likelihood Estimation of Dynamic Rational Expectations Models. *Econometrica*, vol. 51, No. 4, July 1983, pp. 1169–1185.

10. FOERSTER, Andrew, RUBIO-RAMÍREZ, Juan, WAGGONER, Daniel, ZHA, Tao. *Perturbation Methods for Markov-Switching DSGE Model*. Federal Reserve Bank of Kansas City Research Working Paper, No. RWP 13-01, 2013. 84 p.

11. GASPAR, Jess, JUDD, Kenneth L. Solving Large-Scale Rational-Expectations Models. *Macroeconomic Dynamics*, vol. 1, January 1997, pp. 45–75.

12. GOLUB, Gene H., VAN LOAN, Charles F. *Matrix Computations* (3rd ed.). Baltimore : Johns Hopkins University Press, 1996. 728 p.

13. GOMME, Paul, KLEIN, Paul. Second-Order Approximation of Dynamic Models without the Use of Tensors. *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 35, issue 4, April 2011, pp. 604–615.

14. HARTMANN, Philip. *Ordinary Differential Equations* (2nd ed.). New York : Wiley, 1982. 612 p.

15. HOLLINGER, Peter. How TROLL Solves a Million Equations: Sparse-Matrix Techniques for Stacked-Time Solution of Perfect-Foresight Models. Presented at the 14th International Conference on Computing in Economics and Finance, Paris, France, 26–28 June, 2008, Intex Solutions, Inc., Needham, MA [skatīts 2014. gada 21. maijā]. Pieejams: *http://www.intex.com/troll/Hollinger_CEF2008.pdf*.

16. HOLMES, Mark H. *Introduction to Perturbation Methods* (2nd ed.). Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York-Tokyo, 2013. 436 p.

17. JIN, He-Hui, JUDD, Kenneth L. *Perturbation Methods for General Dynamic Stochastic Models*. Stanford Hoover Institution Discussion Paper, April 2002. 44 p.

18. JUDD, Kenneth L. *Numerical Methods in Economics*. Cambridge : The MIT Press, 1998. 633 p.

19. JUDD, Kenneth L., GUU, Sy-Ming. Asymptotic Methods for Aggregate Growth Models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 21, issue 6, June 1997, pp. 1025–1042.

20. JUILLARD, Michel. DYNARE: a Program for the Resolution and Simulation of Dynamic Models with Forward Variables through the Use of a Relaxation Algorithm. CEPREMAP Working Papers, No. 9602, Paris, 1996. 13 p.

21. KIM, Jinill, KIM, Sunghyun, SCHAUMBURG, Ernst, SIMS, Christopher A. Calculating and Using Second Order Accurate Solutions of Discrete Time Dynamic Equilibrium Models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 32, issue 11, November 2008, pp. 3397–3414.

22. LOMBARDO, Giovanni. *On Approximating DSGE Models by Series Expansions*. European Central Bank Working Paper Series, No. 1264, November 2010. 31 p.

23. MEHRA, Rajnish, PRESCOTT, Edward C. The Equity Premium: a Puzzle. *Journal of Monetary Economics*, vol. 15, issue 2, 1985, pp. 145–161.

24. SCHMITT-GROHÉ, Stephanie, URIBE, Martin. Solving Dynamic General Equilibrium Models Using as Second-Order Approximation to the Policy Function. *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 28, issue 4, January 2004, pp. 755–775.

25. SIMS, Christopher A. Solving Linear Rational Expectations Models. *Computational Economics*, vol. 20, issue 1–2, October 2001, pp. 1–20.

26. UHLIG, Harald. A Toolkit for Analysing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily. ***No:*** *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies.* Ed. by R. Marimon and A. Scott. Oxford, UK : Oxford University Press, 1999, pp. 30–61.